Mécanique quantique – L2

Antoine Bourget – Alain Comtet - Antoine Tilloy

Séance du 26 Novembre 2014 - www.lkb.ens.fr/rubrique327

Soutien 5 : Potentiels carrés à une dimension

1 Etude d'un puit carré infini

On considère une particule de masse m se déplaçant dans un puits de potentiel $V(x)$ tel que :

$$\begin{array}{lll} x & \in & [0,a] \qquad V(x) = 0 \\ x & \notin & [0,a] \qquad V(x) = +\infty. \end{array}$$

1. Écrire l'équation satisfaite par une fonction d'onde d'énergie E. Quelles conditions aux limites doit vérifier cette fonction ?
2. Résoudre l'équation d'onde. Montrer que pour que les conditions aux limites soient respectées, l'énergie ne peut prendre que des valeurs quantifiées repérées par un indice $n \geq 1$. Préciser la fonction d'onde $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ associée au ket $|n\rangle$. La normer.
3. On place le système à l'instant $t = 0$ dans l'état :
$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |n+1\rangle).$$
Donner sans calcul l'expression de $|\psi(t)\rangle$ à un instant t ultérieur. Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle H\rangle$ dans cet état.
4. Montrer que la valeur moyenne de la position $\langle x\rangle$ de l'état précédent est une fonction périodique du temps dont on calculera la fréquence ν_n.
5. Comparer le résultat précédent avec celui que l'on obtiendrait pour une particule *classique* évoluant dans le potentiel $V(x)$ avec l'énergie $E = \langle H\rangle$ calculée à la question 3.

2 Transmission par une barrière de potentiel

On considère une particule de masse m en présence d'une barrière de potentiel $V(x)$ telle que :

$$\begin{array}{lll} x & \in & [0,a] \qquad V(x) = V_0 \\ x & \notin & [0,a] \qquad V(x) = 0. \end{array}$$

1. Écrire l'équation satisfaite par une fonction d'onde d'énergie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.
2. On pose
$$\begin{array}{ll} x \in\,]-\infty, 0] & \psi(x) = e^{ikx} + r(k)e^{-ikx} \\ x \in [a, \infty[& \psi(x) = t(k)e^{ikx}. \end{array}$$
Donner l'interprétation physique des coefficients $r(k)$ et $t(k)$. En utilisant la conservation du courant montrer que $|r(k)|^2 + |t(k)|^2 = 1$.

3. Calculer $t(k)$ pour $E < V_0$. Par continuation analytique, en déduire l'expression de $t(k)$ pour $E > V_0$.
4. Donner l'allure de $T(E) = |t(k)|^2$ dans chacune des régions. Quelle est l'interprétation des résonances de diffusion pour $E > V_0$?