Mécanique quantique – L2

Antoine Bourget - Alain Comtet - Antoine Tilloy

Soutien 6

1 Distillation de l'intrication

Supposons que Alice et Bob partagent des paires de qubits dans des états

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sqrt{1-\lambda}|++\rangle + \sqrt{\lambda}|--\rangle.$$

Ces états sont partiellement intriqués si $\lambda \neq 1/2$. Cet exercice propose une méthode pour produire, à partir d'opérations unitaires locales, des états maximalement intriqués, c'est-à-dire des états de Bell.

1.1 Cas simple : deux paires

Le système initial est l'état produit de deux paires $|\Psi\rangle_{AB}$, indicées par α et β.

1. La première étape est la mesure par Alice de l'observable $\sigma_z^\alpha + \sigma_z^\beta$. Quelles sont les résultats possibles ? Quelle est la probabilité d'obtenir la valeur 0 ? Dans quel état est alors projeté le système ?
2. Alice et Bob appliquent chacun une porte CNOT à leurs spins respectifs dans l'état ainsi obtenu. Une porte CNOT est définie par l'évolution unitaire U :

$$\begin{aligned} U|+,\pm\rangle &= |+,\pm\rangle \\ U|-,\pm\rangle &= |-,\mp\rangle \end{aligned}$$

   Montrer que la paire α est dans un état de Bell.

1.2 Approche du problème à N paires

On suppose qu'Alice et Bob partagent N paires partiellement intriquées $|\Psi\rangle_{AB}$.

1. Alice mesure l'observable $\sigma_z^1 + \ldots + \sigma_z^N$. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne $2p - N$ comme résultat de mesure ? Quel est alors l'état $|\Psi_p\rangle$ après la mesure ?
2. Pour N grand, les résultats de mesure sont regroupés de façon certaine autour de quelle valeur $2p_0 - N$? Quel est le nombre de termes moyen dans la décomposition de $|\Psi_p\rangle$ sur la base $|\pm\ldots\pm\rangle$?
3. On admet enfin que $|\Psi_p\rangle$ peut se transformer à l'aide d'un ensemble de transformations unitaires locales pratiquées par Alice et Bob dans l'état

$$|\Phi_k\rangle = \frac{1}{2^{k/2}}\left(|++\rangle + |--\rangle\right)_1 \ldots \left(|++\rangle + |--\rangle\right)_k |--\rangle_{k+1} \ldots |--\rangle_N,$$

   où k est tel que les états $|\Psi_p\rangle$ et $|\Phi_k\rangle$ ont le même nombre de termes lorsqu'on les décompose sur la base $|\pm\ldots\pm\rangle$.
   Montrer que ce procédé permet de produire en moyenne $k = -N\left[\lambda \log_2(\lambda) + (1-\lambda)\log_2(1-\lambda)\right]$ paires dans un état de Bell.

2 Evolution du paquet d'onde

On cherche à établir l'évolution temporelle de la fonction d'onde d'une particule libre.

1. Soit $|\psi_0\rangle$ l'état de la particule à $t = 0$. Si l'on note $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ et $\widehat{\psi}_0(p) = \langle p|\psi_0\rangle$, quelle relation existe-il entre $\psi_0(x)$ et $\widehat{\psi}_0(p)$?
2. Donner ensuite l'expression du vecteur d'état à l'instant t en représentation impulsion.
3. En déduire que l'on a :

$$\psi(x,t) = \int dx' \; \mathcal{G}(x,x',t)\psi_0(x'),$$

avec

$$\mathcal{G}(x,x',t) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}} e^{im(x-x')^2/2\hbar t}.$$

Quel est l'analogue optique de cette relation ?

N.B. : on rappelle que pour α complexe (de partie réelle négative), on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

4. On suppose que la taille initiale du paquet d'onde est petite devant la taille à l'instant t. Donner dans ce cas l'expression de $\psi(x,t)$.
5. Refaire le calcul avec une état de départ gaussien :

$$\psi_0(x') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x'^2}{4\sigma^2}}.$$

Commenter.