Mécanique quantique – L2

Antoine Bourget – Alain Comtet – Antoine Tilloy

Séance du 29 octobre 2014 - `www.phys.ens.fr/ tilloy`

Soutien 3 : Téléportation quantique

---

1 Rappels sur les produits tensoriels

Soient deux systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ décrits chacun par un espace de Hilbert $\mathcal{E}_i$. On cherche l'espace de Hilbert $\mathcal{E}$ décrivant le système total $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \bigcup \mathcal{S}_2$. Cet espace est appelé produit tensoriel de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, noté $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

1. On suppose que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont respectivement dans les états $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$. L'état correspondant de $\mathcal{S}$ est noté $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Quelles propriétés a l'application $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) \to |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$?
2. Soit $\{|n_\alpha^{(i)}\rangle\}$ une base de l'espace $\mathcal{E}_i$. Que dire de la famille $\{|n_\alpha^{(1)}\rangle \otimes |n_\beta^{(2)}\rangle\}$? Quelle est la dimension de l'espace $\mathcal{E}$ si les espaces $\mathcal{E}_i$ sont de dimension finie ?
3. On dit qu'un état $|\alpha\rangle$ est factorisable si on peut le mettre sous la forme $|\alpha\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$. Sinon, on dit qu'il est intriqué. Montrer que tout état de $\mathcal{E}$ peut se mettre sous la forme d'une combinaison d'états factorisés. Montrer aussi qu'il existe toujours dans $\mathcal{E}$ des états intriqués.
4. *Produit scalaire* Donner le produit scalaire de deux états factorisables de $\mathcal{E}$ en fonction des produits scalaires dans chacun des espaces $\mathcal{E}_i$. Même question si un des deux états est intriqué.
5. *Mesures d'observables* On considère $\hat{A}$ une observable d'un système d'espace des états $\mathcal{A}$ et dont on notera $|a_i\rangle$ et α_i les vecteurs propres et valeurs propres correspondantes de cette observable. On utilisera des notations similaires pour un autre système, $\mathcal{B}$.
   (a) On s'intéresse au système $\mathcal{A}$ uniquement. Si il est dans l'état $|\psi\rangle$, quelle est la probabilité de mesurer α_i si la valeur propre est non dégénérée ? si elle est dégénérée ?
   (b) On considère maintenant le système $\mathcal{A} \bigcup \mathcal{B}$. Quelle est l'observable correspondant à $\hat{A}$ dans l'espace produit tensoriel ? Quelles sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres ? Quelle est la probabilité de mesurer α_i ? Quel est l'état du système juste après qu'on a mesuré α_i ?

2 Téléportation quantique

La téléportation quantique consiste à transmettre un bit quantique $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ d'un endroit (Alice) à un autre (Bob) en envoyant deux bits classiques. Comme point de départ, on suppose qu'Alice et Bob partagent un état intriqué de type EPR $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$, et Alice détient en plus le spin $|\phi\rangle$ à transmettre. Alice détient donc deux spins, et Bob un seul.

1. Quelle est l'expression du vecteur d'état $|\Phi\rangle$ du système total ? On placera le spin à transmettre en premier.
2. On rappelle l'expression des quatre états de Bell :

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \qquad & |\psi_3\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \qquad & |\psi_4\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle). \end{aligned}$$

   Montrer qu'on peut réécrire l'état de départ $|\Phi\rangle$ sous la forme

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} |\psi_i\rangle \otimes (\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle).$$

   Donner l'expression des coefficients α_i, β_i.
3. Alice effectue maintenant une mesure de l'état de Bell de ses deux spins. L'état de ses spins est donc projeté sur un des quatre états de Bell. Le résultat peut être paramétré par deux bits classiques. Quelle est la probabilité qu'Alice mesure un état de Bell donné ? Quel est l'état du spin de Bob après la mesure, en fonction du résultat de la mesure d'Alice ?
4. Après mesure et donc projection de l'état $|\Phi\rangle$ sur le résultat de mesure, Alice envoie à Bob son résultat de mesure. Bob utilise alors cette information pour agir sur son spin, de sorte que dans tous les cas il se retrouve à la fin avec l'état $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, ce qui était le but de l'expérience de téléportation.

   Par exemple, si Bob sait qu'Alice a mesuré l'état de Bell $|\psi_1\rangle$, il ne change rien à son spin qui est déjà dans l'état $|\phi\rangle$.

   Pour les trois autres résultats de mesure, proposer une transformation unitaire qui amène le spin de Bob dans l'état $|\phi\rangle$. On cherchera des transformations de la forme $\sigma_x^\alpha \sigma_z^\beta$.
5. Si Bob veut utiliser son spin avant qu'Alice ne fasse de mesure, peut-il faire une transformation unitaire de son spin qui l'amène dans l'état $|\phi\rangle$?
6. *Remarque : comment mesurer un état de Bell ?*

   L'idée est de faire une transformation unitaire amenant les états $|\psi_i\rangle$ sur les états $|\pm\pm\rangle$, qu'on sait distinguer simplement. On combine pour cela deux évolutions unitaires :
   — une porte « CNOT » (*controlled not*), qui transforme $|+\pm\rangle$ en $|+\pm\rangle$ et $|-\pm\rangle$ en $|-\mp\rangle$: on applique un NOT sur le deuxième spin si le premier est dans l'état $|-\rangle$.
   — une porte « de Hadamard » H qui n'agit que sur le premier spin. Elle s'exprime à l'aide des matrices de Pauli : $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$.

   Vérifier que chacun des états de Bell est amené sur un état $|\pm\pm\rangle$ différent.

Bibliographie

— *Article fondateur* : C. H. Bennett *et al*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1985 (1993)
— *Vérification expérimentale* : D. Bouwmeester *et al*, Nature **390**, 575 (1997).