Mécanique quantique – L2

Soutien 1 :Ordres de grandeur, algèbre et probabilités

---

1 Ordres de grandeur

1.1 Effet photoélectrique sur les métaux

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure) de longueur d'onde $\lambda = 253.7$ nm. On constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est 3.14 eV. Si on envoie une radiation visible jaune (raie du sodium) de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm. On constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est 0.36 eV.

1. Retrouver la valeur de la constante de Planck
2. Calculer l'énergie d'extraction minimale des électrons du potassium
3. Calculer la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélectrique sur le potassium

1.2 Flux de photons

1. Une antenne radio émet à la fréquence de 1 MHz, avec une puissance de 1 kW. Quel est le nombre de photons émis par seconde ?
2. Une étoile de première grandeur émet un flux lumineux sur la Terre de $1.6^{-10}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ à une longueur d'onde moyenne de 556 nm. Combien de photons traversent la pupille de l'œil par seconde ?
3. Une photodiode en silicium a une efficacité typique de 0.5 A/W. Donner le nombre de photoélectrons produits par photon incident ($\lambda = 740$ nm).

2 Espace de Hilbert - Opérateurs

Soit $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit hermitien. On rappelle que $\langle\varphi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\varphi\rangle}$

Soit $\widehat{A}$ un endomorphisme de $\mathcal{H}$. On définit $\widehat{A}^\dagger$ tel que :

$$\langle\psi|\widehat{A}^\dagger|\varphi\rangle = \overline{\langle\varphi|\widehat{A}|\psi\rangle}$$

1. Montrer que :

   (a) si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda\widehat{A})^\dagger = \lambda^*\widehat{A}^\dagger$;

(b) $(\widehat{A}+\widehat{B})^\dagger = \widehat{A}^\dagger + \widehat{B}^\dagger$;

(c) $(\widehat{A}\circ\widehat{B})^\dagger = \widehat{B}^\dagger \circ \widehat{A}^\dagger$.

2. Une application $\widehat{A}$ est dite hermitienne *ssi* $\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}$. Montrer que les éléments diagonaux et les valeurs propres d'une application hermitienne sont réelles.
3. Une application $\widehat{U}$ est dite unitaire *ssi* $\widehat{U}^\dagger = \widehat{U}^{-1}$. Montrer que les valeurs propres d'une application unitaire sont des nombres complexes de module 1.
4. Si $\widehat{A}$ est hermitienne, montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{U} = e^{it\widehat{A}}$ est unitaire.

3 Espace de dimension finie

1. On se place dans l'espace $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice A s'écrit :

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

2. On note $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire repéré par les coordonnées polaires (θ, ϕ) (θ étant l'angle de $\mathbf{u}$ avec (Oz)) et on considère $\sigma_u = \sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z$. Donner l'expression de σ_u dans la base dans laquelle σ_z est diagonale. Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres associées.

   On donne l'expression des matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 Attention aux probabilités conditionnelles

Soient $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ trois observables, de vecteurs propres respectifs $\{|u_n\rangle\}_n$, $\{|v_n\rangle\}_n$ et $\{|w_n\rangle\}_n$ (les valeurs propres sont supposées pour simplifier non dégénérées et suffisantes pour déterminer complètement l'état quantique).

1. Supposons que la mesure de $\widehat{A}$ donne la valeur propre u_α. On mesure ensuite $\widehat{C}$. Quelle est la probabilité $P(\gamma|\alpha)$ de mesurer la valeur propre w_γ, connaissant le résultat de la mesure de $\widehat{A}$?
2. On mesure maintenant successivement $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Quelle est la probabilité $P(\gamma, \beta|\alpha)$ de mesurer successivement v_β et w_γ, connaissant le résultat de la mesure de $\widehat{A}$?
3. Quelle formule *classique* relie les $P(\gamma, \beta|\alpha)$ à $P(\gamma|\alpha)$? En écrire l'*équivalent quantique*, explicitant le passage du système de l'état $|u_\alpha\rangle$ à l'état $|w_\gamma\rangle$ par différents chemins.