

Mécanique quantique – Corrigé du TD 9

Erwann Bocquillon – Pierre-François Cohadon – Rémi Desbuquois

Etats quantiques d'atomes de césium dans un piège harmonique

1 États cohérents

1.1 Retour sur la dynamique classique

1. L'équation classique s'obtient en remplaçant p par $m\dot{z}$. On a alors $H_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$. Ceci est une constante, donc la dérivée temporelle est nulle. On obtient $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$. Donc $z(t) = A \cos \omega_0 t$ et $p(t) = -m\omega_0 A \sin \omega_0 t$.
2. $z + ip/m\omega_0 = A \cos \omega_0 t - iA \sin \omega_0 t = Ae^{-i\omega_0 t}$. Le mouvement est donc un cercle.

1.2 Résolution classique de l'oscillateur harmonique

1. On a $Z = z\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$ et $P = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega_0}}$. On calcule $[Z, P] = i$. Le reste du calcul est facile.
2. $[N, a] = -a$ et $[N, a^\dagger] = a^\dagger$.
3. Idées des preuves :
 - (a) Calculer $\|a|\phi_\nu\rangle\|^2 = \nu\|\phi_\nu\|^2$.
 - (b) Appliquer N au vecteur et utiliser la relation de commutation.
 - (c) Faire de même, et remarquer que la norme de $a^\dagger|\phi_\nu\rangle$ est strictement positive, donc que ce vecteur ne peut pas être nul.
 - (d) Le spectre a un plus petit élément ν . Il est positif ou nul. Alors $a|\phi_\nu\rangle$ doit être nul, sinon ce serait un vecteur propre de valeur propre $\nu - 1$. Mais alors cela implique $\nu = 0$ d'après la première propriété. Soit maintenant une valeur propre quelconque. En appliquant a de façon répétée, on doit tomber sur 0, donc cette valeur propre est un entier positif.
4. On en déduit que $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$. L'état fondamental vérifie $a|\phi_0\rangle = 0$. En utilisant la définition de a , ceci nous donne une équation différentielle sur $\phi_0(z)$, que l'on résout en $\phi_0(z) = C \exp(-\frac{m\omega_0 z^2}{2\hbar})$. En particulier, cet état n'est pas dégénéré. On montre alors par récurrence que le niveau d'énergie n n'est pas non plus dégénéré (en appliquant $a^\dagger a$ sur un état propre au niveau $n + 1$).
5. Il suffit d'utiliser les calculs de norme faits précédemment.
6. On a $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$.

1.3 Propriétés des états cohérents

1. Appliquer a sur l'état et utiliser l'action de a sur $|n\rangle$. On obtient une relation de récurrence que l'on résout en $C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0$. La normalisation de l'état $|\alpha\rangle$ donne alors $C_0 = \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})$. La probabilité $p(E_n)$ de trouver l'énergie E_n est $e^{-|\alpha|^2} \times |\alpha|^{2n}/n!$ (loi de Poisson).

2. On utilise l'expression du Hamiltonien en fonction de a et a^\dagger . On trouve $\langle E \rangle = \hbar\omega_0(|\alpha|^2 + 1/2)$ et $\langle E^2 \rangle = (\hbar\omega_0)^2(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + 1/4)$, donc $\Delta E = \hbar\omega_0|\alpha|$.
3. On a $\langle z \rangle = (\alpha + \alpha^*)/\sqrt{2}$, $\langle p \rangle = i(-\alpha + \alpha^*)/\sqrt{2}$, $\langle Z^2 \rangle = (\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1)$, $\Delta Z^2 = 1/2$. De même $\Delta P^2 = 1/2$. On a donc $\Delta z \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. La borne inférieure de l'inégalité de Heisenberg est atteinte, donc la représentation en Z ou en P de la fonction d'onde est gaussienne.

2 Manipulation d'états quantiques

2.1 Présentation du piège harmonique

1. Les deux faisceaux étant polarisés linéairement et parallèlement (voir la figure 1 de l'énoncé), ils peuvent interférer. L'intensité qui résulte de cette interférence à deux ondes est de la forme :

$$I = I_0 [1 + \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r})] \quad (1)$$

$$= I_0 [1 + \cos(2k \sin \alpha z)]. \quad (2)$$

L'intensité et l'énergie potentielle sont donc modulées sinusoidalement avec une période spatiale a telle que $2\pi/a = 2k \sin \alpha \Leftrightarrow a = \lambda/2 \sin \alpha = 626 \text{ nm}$.

2. Corrections simples au modèle :
 - L'enveloppe est due à la taille finie du faisceau laser : l'intensité décroît au fur et à mesure qu'on s'écarte de l'axe du faisceau laser, avec une taille typique de l'ordre de 100 microns.
 - La composante affine est due... à l'énergie potentielle de pesanteur mg : on trouve une variation de l'énergie de $100 \mu\text{K}$ sur $600 \mu\text{m}$, soit une pente de $1.38 \times 10^{-23} \times 10^{-4}/6 \times 10^{-4} \simeq 0.25 \times 10^{-23} \text{ N}$, ce qui correspond bien à une masse de $0.25 \times 10^{-23}/9.81 \times 1.66 \times 10^{-27} \simeq 140 \text{ ua}$.
3. (a) Pour assimiler les puits à des puits harmoniques, il faut que sur l'étendue de la fonction d'onde, les corrections anharmoniques au potentiel soient également négligeables. Il faut donc commencer par évaluer la taille caractéristique Δz_0 de la fonction d'onde.
- (b) Si on fait un développement limité de U autour d'un de ses minima $z_k = (k + 1/2)a$ (avec k entier relatif), on trouve :

$$U_2 \simeq \frac{\pi^2 U_0}{a^2} (z - z_k)^2. \quad (3)$$

En identifiant avec l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω_z ,

$$U_{\text{harm}} = \frac{1}{2} m \omega_z^2 (z - z_k)^2, \quad (4)$$

on obtient une pulsation :

$$\omega_z = 2\pi \sqrt{\frac{U_0}{2ma^2}} \simeq 2\pi \times 127 \text{ kHz}. \quad (5)$$

L'échelle d'énergie de l'oscillateur $\hbar\omega_z$ est alors de l'ordre de 10^{-28} J, soit $6 \mu\text{K}$.

Dans l'état $|n\rangle$, la dispersion sur la position vaut $\Delta z_n = 2\Delta z_0 \sqrt{n + \frac{1}{2}}$. On peut vérifier *classiquement* (ce qui sera justifié plus loin dans le cours) que le terme suivant du développement du potentiel est négligeable, les termes U_2 et U_4 du développement limité étant dans un rapport :

$$\frac{U_4}{U_2} \simeq n \left(\frac{\Delta z_0}{a} \right)^2 \quad (6)$$

$$\frac{U_4}{U_2} \ll 1 \text{ pour } n \leq 10. \quad (7)$$

(c) L'application numérique donne :

$$\Delta z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z}} = 18 \text{ nm}. \quad (8)$$

On obtient immédiatement la dispersion en impulsion en écrivant que le fondamental de l'oscillateur harmonique est un état minimal vis-à-vis de l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta p_0 = \frac{\hbar}{2\Delta z_0} = 2.9 \times 10^{-27} \text{ kg.m.s}^{-1}, \quad (9)$$

soit une dispersion sur la vitesse :

$$\Delta v_0 = \frac{\Delta p_0}{m} = 13.4 \text{ mm.s}^{-1}. \quad (10)$$

(d) Pour peupler uniquement l'état fondamental, la température doit vérifier :

$$k_B T \ll \hbar\omega_z \Leftrightarrow T \ll T_C \simeq 6 \mu\text{K}. \quad (11)$$

Il est donc nécessaire de refroidir encore les atomes à partir du piège magnéto-optique à $13 \mu\text{K}$.

Remarque :

Les différents puits sont couplés par effet tunnel. Pour estimer la probabilité P de passage d'un puits à l'autre, on peut représenter le potentiel harmonique par un potentiel en créneau, de période spatiale a et d'amplitude U_0 .

La probabilité de passage pour la barrière carrée (de largeur $a/2$) vaut alors :

$$P \simeq \frac{16E(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-\rho a},$$

avec :

$$\rho = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

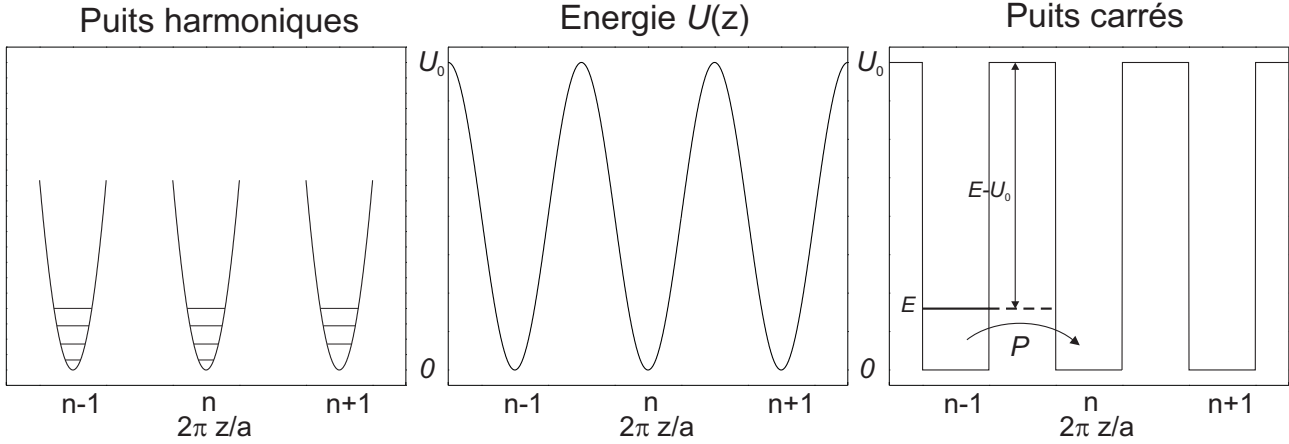


FIGURE 1 – Potentiel $U_0(z)$ (centre) et formes approchées pour le traiter. Gauche : puits harmoniques équivalents, utilisés pour calculer les états stationnaires. Droite : puits carrés équivalents, utilisés pour évaluer le couplage entre les puits.

Même pour $n = 10$ ($E \simeq 10^{-27}$ J), on trouve :

$$1/\rho = 3.6 \text{ nm et } P \simeq 10^{-78}.$$

Le couplage entre les différents puits est donc parfaitement négligeable. Les différents puits de potentiel réalisent donc des puits harmoniques indépendants.

On notera que la forme gaussienne des faisceaux (avec l'intensité maximale au centre) entraîne une dispersion des fréquences ω_z avec la position du puits. Avec des faisceaux de waist $120 \mu\text{m}$ et des atomes initialement répartis selon une gaussienne de largeur $56 \mu\text{m}$, on trouve une variation relative :

$$\Delta\omega_z/\omega_z \simeq 8 \text{ \%}.$$

2.2 Technique du temps de vol

1. En présence du (ou plus exactement des) potentiel(s) harmonique(s), la distribution de position des atomes reflète :

- (a) la dispersion *quantique* ($\simeq 2\sqrt{n + \frac{1}{2}\Delta z_0}$) de chaque atome autour du minimum de son puits de potentiel ;
- (b) la dispersion *classique* ($\simeq 56 \mu\text{m}$) due à la dispersion des centres des différents puits occupés, liée à la taille initiale du nuage d'atomes froids.

En pratique, la dispersion classique est nettement prédominante : imager la distribution de position à $t = 0$ donne donc uniquement accès à la taille du nuage d'atomes froids. De plus, à cause de la limite de diffraction, il est impossible d'accéder directement à la forme de la fonction d'onde.

2. (a) Supposons que les atomes soient initialement préparés dans le niveau $|n = 0\rangle$, qui correspond à une fonction d'onde gaussienne, en position comme en impulsion. On

a :

$$\begin{aligned}
 |\Psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ipx/\hbar} \psi(x, 0) |p\rangle dp \\
 |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ipx/\hbar} \psi(x, 0) e^{-ip^2 t/(2m\hbar)} |p\rangle dp
 \end{aligned}$$

- (b) On a déjà vu qu'après un temps τ , la dispersion en position $\Delta z(\tau)$ des atomes (celle qui est mesurée par le système d'imagerie) vérifie :

$$\Delta z(\tau)^2 = \Delta z(0)^2 + \left(\frac{\Delta p_0}{m}\right)^2 \tau^2,$$

soit ici :

$$\Delta z(\tau)^2 = \Delta z_0^2 (1 + \omega_z^2 \tau^2).$$

Si les atomes sont initialement préparés dans un état $|n\rangle$ autre que le fondamental, on peut qualitativement prédire que la distribution de position au temps τ présentera des maxima reliés aux maxima de la distribution en impulsion au temps $\tau = 0$, soit la distribution de l'état $|n\rangle$ (voir aussi le TD 6).

- (c) Dans la limite où $\omega_z \tau \gg 1$, la mesure de $\Delta z(\tau)$ permet ainsi de remonter directement à la dispersion Δp_0 .

On a également à tenir compte du moyennage lié à la distribution initiale des atomes dans les différents pièges. Si on note Δ_{nuage} la taille du nuage d'atomes froids initial, on a intérêt à avoir :

$$\begin{aligned}
 \Delta z_0^2 (1 + \omega_z^2 \tau^2) &\gg \Delta_{nuage}^2 \\
 \Leftrightarrow \omega_z \tau &\gg \Delta_{nuage} / \Delta z_0
 \end{aligned}$$

pour pouvoir interpréter simplement les résultats.

Numériquement, on trouve $\tau \gg 4$ ms pour l'état fondamental, et une condition moins restrictive pour les états excités, dont les dispersions quantiques croissent comme \sqrt{n} .

3. (a) La gaussienne ajustée au résultat expérimental a une largeur d'environ $300 \mu\text{m}$ à $1/e$. La distribution de position au temps τ étant de la forme $\exp\{-\frac{z^2}{2\Delta z(\tau)^2}\}$, cela nous donne :

$$2\sqrt{2}\Delta z(\tau) \simeq 300 \mu\text{m}.$$

La condition $\omega_z \tau \gg 1$ est ici largement remplie : la largeur initiale en position d'origine quantique est donc négligeable. Par contre, τ est à peine plus grand que la borne inférieure de 4 ms trouvée précédemment : il faut donc tenir compte de la largeur initiale du nuage d'atomes froids.

Malgré ces réserves, on peut faire une première estimation de Δv_0 :

$$\Delta v_0 = \Delta z(\tau) / \tau_{\text{vol}} = \frac{300 \times 10^{-6}}{2\sqrt{2} \times 6 \times 10^{-3}} \simeq 18 \text{ mm.s}^{-1},$$

à comparer aux 13 mm.s^{-1} attendus (voir l'éq. 10) : la largeur initiale du nuage augmente sensiblement le résultat.

- (b) Si on note $f_1(z - z_k)$ la distribution (normée) en position au temps τ liée à la dispersion du paquet d'ondes (et centrée sur la position z_k du $k^{\text{ième}}$ puits) et $f_2(z_k)$ la distribution (normée) initiale des atomes sur les différents puits, la distribution de position observée f s'écrit :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - z_k) f_2(z_k) dz_k.$$

Cette relation s'interprète simplement en disant que $f(z)$ correspond à la somme des contributions des différents puits ($\int_{-\infty}^{\infty} dz_k \dots$), égales au produit du poids du puits ($f_2(z_k)$) par sa contribution propre ($f_1(z - z_k)$) à une distance $(z - z_k)$ de son centre. Si f_1 et f_2 sont deux gaussiennes de largeurs respectives Δ_1 et Δ_2 , leur *produit de convolution* est une gaussienne de largeur $\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$.

En effet, si

$$f(z) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(z - z_k)^2}{2\Delta_1^2}\right\} \exp\left\{-\frac{z_k^2}{2\Delta_2^2}\right\} dz_k,$$

le terme dans l'exponentielle se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left((z - z_k)^2 / \Delta_1^2 + z_k^2 / \Delta_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} z_k^2 \left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2 \right) - 2zz_k / \Delta_1^2 + z^2 / \Delta_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2 \right) \left(z_k^2 - \frac{2zz_k}{1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2} + \frac{z^2}{1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2 \right) \left(\left(z_k - \frac{z}{1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2} \right)^2 - \frac{z^2}{(1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2)^2} + \frac{z^2}{1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2} \right). \end{aligned}$$

L'intégration sur z_k fait disparaître la dépendance en z du premier terme (par changement de variable). Il ne reste qu'une gaussienne avec un terme en facteur de $-z^2$ dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta^2} &= \frac{1}{2} \left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2 \right) \left(\frac{1}{(1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2)^2} - \frac{1}{1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2 \right) \left(\frac{1 - (1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2)}{(1 + (\Delta_1/\Delta_2)^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}. \end{aligned}$$

On peut également retrouver plus rapidement ce résultat en remarquant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier, et que le produit de deux gaussiennes est une gaussienne...

En tenant compte de la distribution initiale de $56 \mu\text{m}$ de large, on déduit une dispersion des vitesses Δv :

$$\Delta v = \frac{1}{\tau} \sqrt{\Delta z(\tau)^2 - \Delta_{nuage}^2} \simeq 15 \text{ mm.s}^{-1},$$

en bon accord avec la valeur théorique.

4. On attend une distribution de position au temps τ qui reflète la distribution d'impulsion de l'état $|n = 1\rangle$. La distribution observée présente bien la structure symétrique avec un double pic attendue, la distribution ne s'annulant pas en $z = 0$ à cause de la largeur initiale du nuage. La distribution de vitesses est de la forme :

$$P(v) \propto v^2 e^{-v^2/2\Delta v_0^2},$$

et elle est maximale pour $v_{\pm} = \pm\sqrt{2}\Delta v_0$. Expérimentalement, on trouve des maxima à une distance d'environ $200 \mu\text{m}$, ce qui pour un temps de vol de 10 ms conduit à :

$$v_{\pm} = \pm 20 \text{ mm.s}^{-1},$$

en bon accord avec la valeur attendue (de l'ordre de 19 mm.s^{-1}).

2.3 Réalisation d'un état comprimé

1. Une fois le piège coupé, les atomes sont libres. Les points d'impulsion $\pm p_0$ vont se déplacer de $\pm p_0\tau_1/m$: la distribution, initialement circulaire, va se déformer et devenir elliptique.

Le point $(0, 1)$ va ainsi se déplacer en $(p_0\tau_1/z_0, 1) = (\omega_z\tau_1, 1)$ et le grand axe de l'ellipse aura une longueur $q_1 = \sqrt{1 + \omega_z^2\tau_1^2} \simeq 4$.

On **admet** que la largeur q_2 du petit axe est telle que $q_1q_2 = 1$. Cela signifie que l'aire de l'ellipse est conservée par l'évolution unitaire (théorème de Liouville). L'état initial présente des fluctuations isotropes dans toutes les "directions" de l'espace des phases, et on admet que l'aire du cercle est minimale. Au cours de l'évolution, les fluctuations ne sont plus isotropes, mais restent minimales au sens défini précédemment. En revanche, si on se concentre uniquement sur les directions x et p , on remarque que les fluctuations en p sont constantes, mais que Δz croît, conformément aux résultats des TD 2 et 6. L'état ne reste donc pas minimal au sens des inégalités d'Heisenberg.

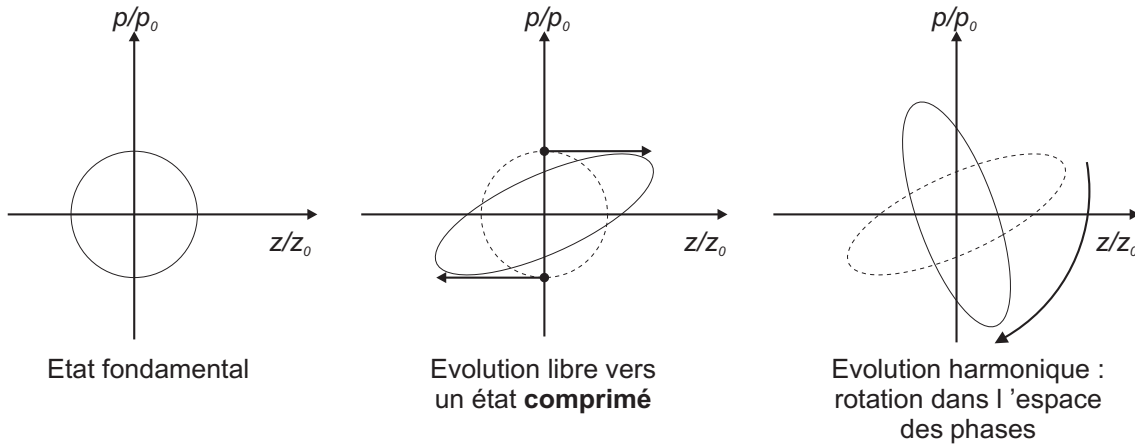


FIGURE 2 – Evolution temporelle de la distribution dans l'espace des phases. Partant de l'état fondamental, la distribution se déforme lors de la phase d'évolution libre, puis tourne à la pulsation ω_z quand on rétablit les faisceaux de piégeage.

2. L'état est donc **comprimé** en ce sens qu'il présente des directions privilégiées dans l'espace des phases. Au temps τ_1 , quand on rebranche le piège, c'est une combinaison linéaire de z et de p qui est comprimée.

Une fois le piège rebranché, la distribution reprend son évolution harmonique et tourne à ω_z : on va ainsi observer en τ_2 une alternance de minima ($\simeq 0.25$, quand la distribution est alignée selon z) et de maxima ($\simeq 4$, quand elle est alignée selon p).

La figure 2 résume l'évolution temporelle pendant ces deux phases.

3. Pour un temps τ_2 quelconque, on observe $p_{\text{rms}} = \sqrt{q_1^2 \cos^2 \theta + q_2^2 \sin^2 \theta}$, où θ est l'angle (qui tourne à ω_z dans le sens des aiguilles d'une montre) entre le grand axe de l'ellipse et l'axe des p . La figure 2.3 présente l'évolution attendue, à la fréquence $2\omega_z$.
4. L'inégalité de Heisenberg ne contraint que le produit $\Delta z \Delta p$. Elle est toujours vérifiée, même quand $\Delta p < p_0$.
5. L'effet principal à prendre en compte est la dispersion des fréquences d'oscillation. Cette superposition d'oscillations à différentes fréquences (avec $\Delta\omega_z/\omega_z \simeq 8\%$) conduit (comme dans de nombreuses expériences de physique : interférences avec une source polychromatique par exemple) à une diminution drastique du contraste après quelques oscillations.

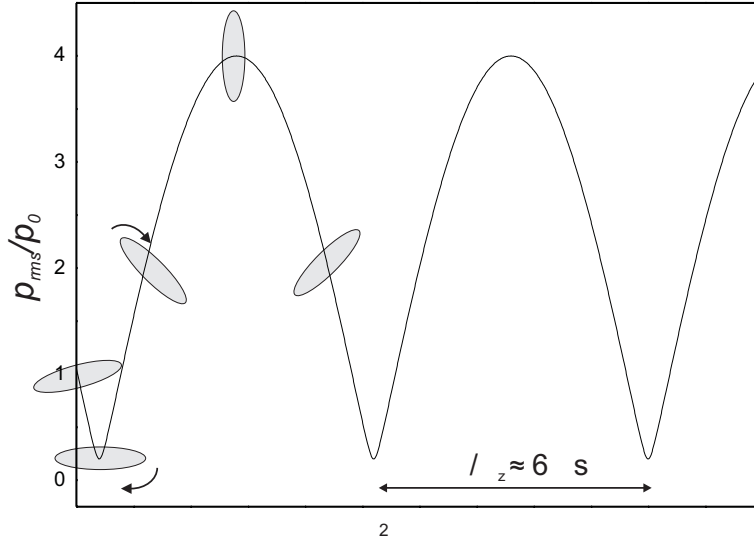


FIGURE 3 – Evolution temporelle de la largeur en impulsion attendue, avec $q_1 = 1/q_2 = 4$. La courbe oscille à la pulsation $2\omega_z$. Le maximum est atteint pour une distribution alignée selon p , le minimum pour une distribution alignée selon z .

Un exemple d'application (potentielle...) des états comprimés : une mesure de force

On peut mesurer une force en l'utilisant pour créer (et en détectant) une excitation classique d'un résonateur mécanique, c'est-à-dire un état cohérent. Les fluctuations quantiques du résonateur mécanique vont limiter la précision avec laquelle on va pouvoir estimer l'amplitude du déplacement, donc la sensibilité de la mesure de force. Pour améliorer la sensibilité, on peut réaliser un état comprimé en amplitude, afin de mesurer plus précisément l'amplitude de l'état cohérent créé. On peut aussi envisager de réaliser un état comprimé en phase pour mesurer plus précisément la phase de la force (à travers le moment où x atteint la valeur nulle).

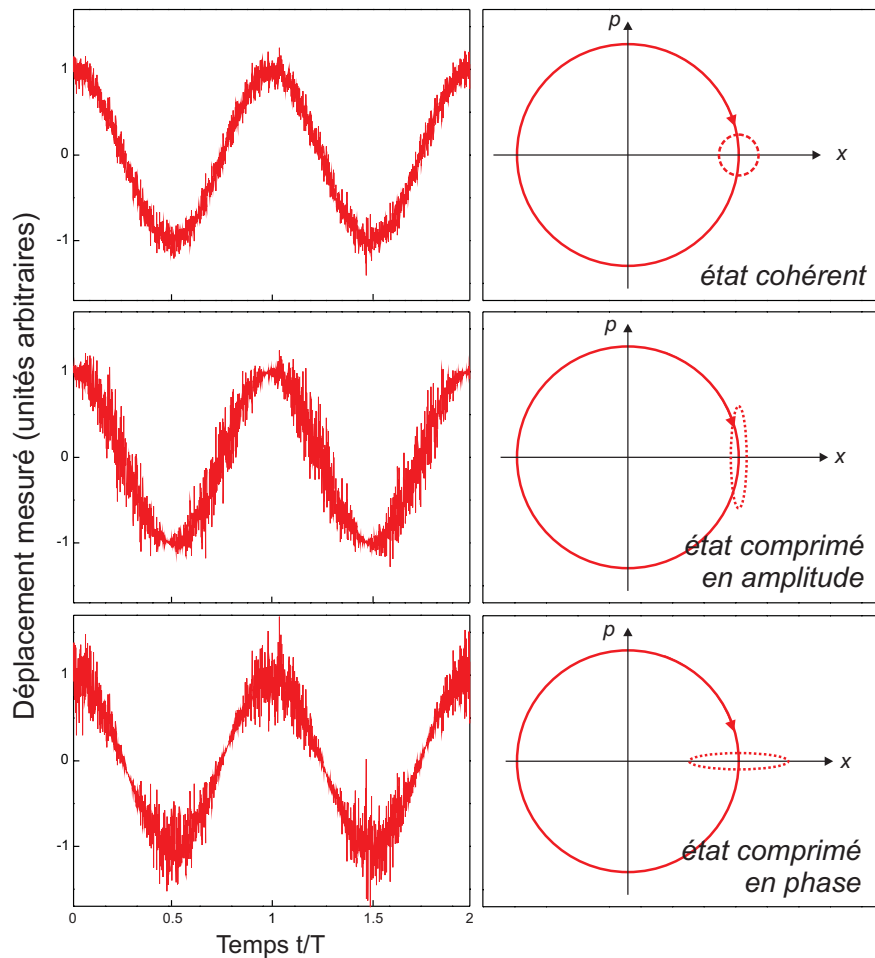


FIGURE 4 – Effet de la compression des fluctuations quantiques sur la mesure du déplacement d'un résonateur mécanique dans un état cohérent.