Corrigé TD 8

2) courant de probabilité

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

- $x < -\frac{d}{2}$ $\quad \psi(x) = e^{ikx} + r(k) e^{-ikx}$

$$j = \frac{\hbar k}{m}\left(1 - |r|^2\right)$$

- $x > \frac{d}{2}$ $\quad \psi(x) = t(k) e^{ikx}$

$$j = \frac{\hbar k}{m} |t|^2$$

conservation de $j \Rightarrow$ $\boxed{|r|^2 + |t|^2 = 1}$

3) C'est un état stationnaire de diffusion venant de $+\infty$

les coefficients $r(k)$ et $t(k)$ sont les mêmes car le potentiel est symétrique $V(x) = V(-x)$

4) En utilisant $H\psi_1 = E\psi_1$ et $H\psi_2 = E\psi_2$ il vient

$$\frac{d}{dx} W(x) = \frac{d}{dx}\left[\psi_1' \psi_2 - \psi_2' \psi_1\right] = \psi_1'' \psi_2 - \psi_2'' \psi_1 = 0$$

donc $W(x) = \underline{\text{Cte}}$

$W(x) = 0 \Rightarrow \frac{\psi_1'}{\psi_1} = \frac{\psi_2'}{\psi_2} \Rightarrow \psi_1$ et ψ_2 proportionnels le calcul donne

$$x < -\frac{d}{2} \qquad \psi_\ell' \psi_r^* - \psi_\ell \psi_r'^* = -2ikrt^*$$

$$x > \frac{d}{2} \qquad \psi_\ell' \psi_r^* - \psi_\ell \psi_r'^* = 2ikr^*t$$

Par conséquent

$$tr^* = -rt^*$$

t^*r est purement imaginaire donc

$$r = \pm i|r|e^{i\delta}$$

5) Bloch donne $\begin{cases} \psi(x+d) = e^{iqd}\psi(x) \\ \psi'(x+d) = e^{iqd}\psi'(x) \end{cases}$

6) On construit $\psi(x)$ comme une combinaison linéaire de ψ_ℓ et ψ_r (dans une cellule élémentaire)

$$\psi(x) = A\psi_r(x) + B\psi_\ell(x)$$

Les conditions de périodicité donnent

$$\begin{cases} A\psi_r\left(\frac{d}{2}\right) + B\psi_\ell\left(\frac{d}{2}\right) = e^{iqd}\left[A\psi_r\left(-\frac{d}{2}\right) + B\psi_\ell\left(-\frac{d}{2}\right)\right] \\ A\psi_r'\left(\frac{d}{2}\right) + B\psi_\ell'\left(\frac{d}{2}\right) = e^{iqd}\left[A\psi_r'\left(-\frac{d}{2}\right) + B\psi_\ell'\left(-\frac{d}{2}\right)\right] \end{cases}$$

en posant $\begin{cases} R = re^{ikd} \\ T = te^{ikd} \end{cases}$ on ~~pa~~ obtient

$$\det \begin{vmatrix} 1+R-Te^{iqd} & T-(1+R)e^{iqd} \\ 1-R-Te^{iqd} & -T+(1-R)e^{iqd} \end{vmatrix} = 0$$

Par conséquent

$$T-(1-R^2)e^{iqd}-T^2e^{iqd}+Te^{2iqd}=0$$

$$T\left(e^{-iqd}+e^{iqd}\right)=1-R^2+T^2$$

$$\cos qd=\frac{1-R^2+T^2}{2T}=\frac{1-r^2e^{2ikd}+t^2e^{2ikd}}{2te^{ikd}}$$

$$\boxed{\cos qd=\left(\frac{t^2-r^2}{2t}\right)e^{ikd}+\frac{1}{2t}e^{-ikd}}$$

7) En utilisant $t=|t|e^{i\delta}$

$r=\pm i|r|e^{i\delta}$ il vient

$$\cos qd=\left[\frac{|t|^2+|r|^2}{2|t|}\right]e^{i(kd+\delta)}+\frac{1}{2|t|}e^{-i(kd+\delta)}$$

$$\boxed{\cos qd=\frac{1}{\cancel{2}|t|}\cos(kd+\delta)}$$

. les bords de bande sont donnés par $\cos qd=\pm 1$

. les états tels que $kd+\delta=2n\pi$ ne sont pas dans le spectre car $\frac{\cos(kd+\delta)}{|t|}>1$ (en effet $|t|<1$)

pour $k\to\infty$ $|t|\to 1$ la barrière devient de plus en plus étroite. les bords de bande sont en gros donnés par $\cos(kd+\delta)=1$

Application
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{\hbar^2\mu}{2m}\delta(x)\psi=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi$$

soit $-\psi''+\mu\,\delta(x)\psi=k^2\psi$

on a $\begin{cases}\psi(x)=e^{ikx}+r(k)\,e^{-ikx} & \text{pour } x<0\\ \psi(x)=t(k)\,e^{ikx} & x>0\end{cases}$

les conditions de raccordement : continuité de ψ et discontinuité de ψ' donnent

$$\begin{cases}1+r(k)=t(k)\\ -[ikt-ik(1-r)]+\mu t=0\end{cases}$$

d'où $\begin{cases}t(k)=\dfrac{2ik}{2ik-\mu}\\ r(k)=\dfrac{+\mu}{2ik+\mu}\end{cases}$

$$\operatorname{tg}\delta=-\frac{\mu}{2k}$$

on vérifie que $|t(k)|=\dfrac{2k}{\sqrt{4k^2+\mu^2}}=\cos\delta$

par conséquent

$$\frac{\cos(kd+\delta)}{|t|}=\frac{\cos(kd+\delta)}{\cos\delta}=\cos kd-\operatorname{tg}\delta\sin kd$$
$$=\cos kd+\frac{\mu}{2k}\sin kd$$

On retrouve la condition du TD 7

$$\boxed{\cos qa=\cos kd+\frac{\mu}{2k}\sin kd}$$

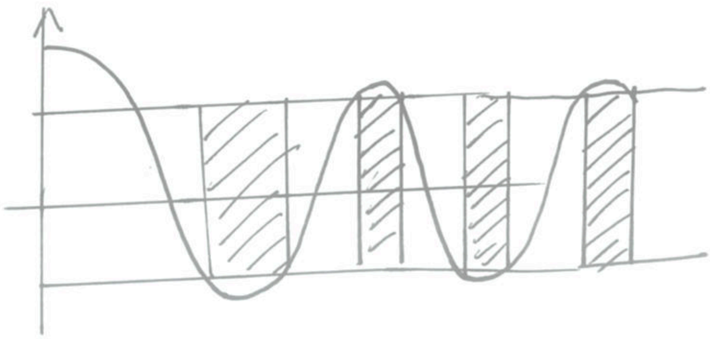
bords de bande

$$\frac{\cos(kd+\delta)}{\cos\delta} = \pm 1 = (-1)^n$$

par conséquent $\begin{cases} \cancel{\cos} k_1 d = \cancel{2} n\pi \\ k_2 d = n\pi - 2\delta \end{cases}$

avec $tg\,\delta = -\frac{\mu}{2k} \sim -\frac{\mu d}{2n\pi}$

les bandes interdites sont donc de plus en plus resserrées.



localisation d'Anderson

1) Vérifions la relation $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{t}} & -\frac{\bar{r}}{\bar{t}} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

① $a = 1 \quad b = \cancel{k}\, r(k)$

$c = t(k) \quad d = 0$

on a $\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{t}} & -\frac{\bar{r}}{\bar{t}} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-r\bar{r}}{\bar{t}} = \frac{t\bar{t}}{\bar{t}} = t \\ 0 \end{pmatrix}$

② les états de la question 3 satisfont

$\psi(x) = t(k)\, e^{-ikx} \quad x<0$ soit $a = 0 \quad c = r(k)$

$\psi(x) = e^{-ikx} + r(k) e^{ikx} \quad x>0 \qquad b = t(k) \quad d = 1$

Verification

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{t}} & -\frac{\bar{r}}{\bar{t}} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{r}\,t}{\bar{t}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant la relation prouvée à la question 4

$\frac{t}{\bar{t}} = -\frac{r}{\bar{r}}$ on obtient $\quad -\bar{r}\frac{t}{\bar{t}} = r$.

La matrice de transfert satisfait donc les propriétés requises.

2) Pour 2 potentiels disjoints il faut composer 3 matrices

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{t}_2} & -\frac{\bar{r}_2}{\bar{t}_2} \\ -\frac{r_2}{t_2} & \frac{1}{t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ikd} & 0 \\ 0 & e^{-ikd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{t}_1} & -\frac{\bar{r}_1}{\bar{t}_1} \\ -\frac{r_1}{t_1} & \frac{1}{t_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{t}} & -\frac{\bar{r}}{\bar{t}} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\frac{1}{t} = \frac{e^{-ikd}}{t_1 t_2} + \frac{\bar{r}_1 r_2}{t_2 \bar{t}_1} e^{ikd}$$

en utilisant $\frac{\bar{r}_1}{\bar{t}_1} = -\frac{r_1}{t_1}$ il vient

$$\frac{1}{t} = \frac{e^{-ikd}}{t_1 t_2} - \frac{r_1 r_2}{t_1 t_2} e^{ikd}$$

qui est la relation cherchée

$$\boxed{t = \frac{t_1 t_2 e^{ikd}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikd}}}$$

3) transmission par un potentiel désordonné

on applique la relation précédente pour le système obtenu par ajout d'un segment

$$t_{n+1} = \frac{t_1 t_n e^{ikd_n}}{1 - r_1 r_n e^{2ikd_n}}$$

en passant au module $T = |t|^2$

$$\boxed{T_{n+1} = \frac{T_1 T_n}{|1 - r_1 r_n e^{2i\phi_n}|^2}}$$

en passant au ln et après moyenne sur la ~~dernière~~ phase on obtient

$$\langle \ln T_{n+1} \rangle = \langle \ln T_n \rangle + \ln T_1$$

donc $\langle \ln T_n \rangle = n \ln T_1$

$$e^{\langle \ln T_n \rangle} = e^{n \ln T_1}$$

puisque $T_1 < 1$ cette quantité tend vers 0 exponentiellement vite. La décroissance exponentielle de T caractérise le phénomène de localisation. Attention : $\langle \ln T \rangle \neq \ln \langle T \rangle$