Mécanique quantique – Corrigé du TD 4

Antoine Bourget - Alain Comtet - Antoine Tilloy

1 Les inégalités de Bell

1.1 L'indéterminisme quantique

1. Les résultats possibles pour la mesure d'un spin 1/2 sur un axe quelconque sont $\pm\hbar/2$. Avant de calculer les probabilités demandées, on peut vérifier que l'état donné est bien normalisé. Ceci étant fait, on utilise la formule usuelle : $\mathcal{P}(S_z = +\hbar/2) = \langle\psi| + z\rangle\langle+z|\psi\rangle = |\langle+z|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$. On trouve évidemment la même chose pour $\mathcal{P}(S_z = -\hbar/2)$.
2. Comme expliqué dans la question précédente, les résultats possibles sont toujours $\pm\hbar/2$. Pour obtenir les probabilités, il faut simplement exprimer $|+x\rangle$ et $|-x\rangle$ dans la base $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$. Rappelons la formule générale, vue en cours

$$|\pm z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle \pm |-x\rangle).$$

Donc $|\phi\rangle = |-x\rangle$. On en déduit immédiatement les probabilités $\mathcal{P}(S_x = +\hbar/2) = 0$ et $\mathcal{P}(S_x = -\hbar/2) = 1$.

1.2 L'argument EPR

1. Supposons qu'Alice et Bernard choisissent tous les deux le vecteur $\mathbf{e}_z$. Alice effectue sa mesure avec l'opérateur $S_z \otimes \mathbf{1}$, et elle trouve $\pm\hbar/2$ avec probabilités 1/2 et 1/2. Si elle trouve $+\hbar/2$, alors après la mesure, l'état du système est $|+z; -z\rangle$, et Bernard mesure $-\hbar/2$ avec probabilité 1. Inversement, si Alice a trouvé $-\hbar/2$, alors Bernard ne peut trouver que $+\hbar/2$. Il y a donc anti-corrélation parfaite ! Le produit des deux mesures vaut, avec probabilité 1, $-\hbar^2/4$, donc $E(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = -1$. De façon plus formelle, nous avons calculé (on note abusivement de la même façon S_z les opérateurs de mesure du spin selon l'axe z pour les deux particules ; l'abus provient du fait que ces opérateurs agissent sur des espaces différents, et donc sont en principe différents) :

$$\begin{aligned}
\langle\psi|S_z \otimes S_z|\psi\rangle &= \frac{1}{2} \times \frac{\hbar^2}{4}(\langle+z;-z| - \langle-z;+z|)\sigma_z \otimes \sigma_z(|+z;-z\rangle - |-z;+z\rangle) \\
&= \frac{\hbar^2}{8}(\langle+z;-z| - \langle-z;+z|)(-|+z;-z\rangle + |-z;+z\rangle) \\
&= \frac{\hbar^2}{8}(-1-1) = -\frac{\hbar^2}{4}.
\end{aligned}$$

A l'aide de la fonction E, cela s'écrit simplement $E(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z) = -1$. Notons que E traduit bien la corrélation, au sens mathématique du terme (rappelons que la corrélation entre deux grandeurs A et B est donnée par $\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$). Il s'agit en effet de la moyenne du produit, auquel on soustrait le produit des moyennes, ces dernières étant nulles !

2. Utilisons directement le résultat de la question suivante, plus générale, qui permet de répondre à celle-ci. De $E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = -\mathbf{u}_a.\mathbf{u}_b$ on déduit que quel que soit le vecteur unitaire $\mathbf{u}$, on a $E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -1$.
3. Faisons un calcul similaire à celui fait précédemment :

$$\begin{aligned}E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) &= \frac{4}{\hbar^2}\langle\psi|\mathbf{S}.\mathbf{u}_a \otimes \mathbf{S}.\mathbf{u}_b|\psi\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle +z; -z| - \langle -z; +z|)\sigma.\mathbf{u}_a \otimes \sigma.\mathbf{u}_b(|+z; -z\rangle - |-z; +z\rangle)\end{aligned}$$

En développant, on obtient 4 termes de la forme

$$\langle +z; -z|\sigma.\mathbf{u}_a \otimes \sigma.\mathbf{u}_b| + z; -z\rangle = \langle +z|\sigma.\mathbf{u}_a| + z\rangle\langle -z|\sigma.\mathbf{u}_b| - z\rangle.$$

Tout se ramène donc au calcul de termes de la forme

$$\langle +z|\sigma.\mathbf{u}| + z\rangle = u_z,$$

$$\langle -z|\sigma.\mathbf{u}| - z\rangle = -u_z,$$

où l'on a utilisé le fait que la valeur moyenne de σ_x dans l'état $|+z\rangle$ est 0 alors que celle de σ_z est 1. On a donc trouvé

$$\langle +z; -z|\sigma.\mathbf{u}_a \otimes \sigma.\mathbf{u}_b| + z; -z\rangle = -u_{a,z}u_{b,z}.$$

De même, on a

$$\langle -z; +z|\sigma.\mathbf{u}_a \otimes \sigma.\mathbf{u}_b| - z; +z\rangle = -u_{a,z}u_{b,z}.$$

Reste à procéder de façon similaire pour les deux autres termes :

$$\langle +z; -z|\sigma.\mathbf{u}_a \otimes \sigma.\mathbf{u}_b| - z; +z\rangle = (u_{a,x} - iu_{a,y})(u_{b,x} + iu_{b,y})$$

$$\langle -z; +z|\sigma.\mathbf{u}_a \otimes \sigma.\mathbf{u}_b| + z; -z\rangle = (u_{a,x} + iu_{a,y})(u_{b,x} - iu_{b,y})$$

car

$$\begin{aligned}\langle +z|\sigma.\mathbf{u}| - z\rangle &= u_x\langle +z|\sigma_x| - z\rangle + u_y\langle +z|\sigma_y| - z\rangle + u_z\langle +z|\sigma_z| - z\rangle \\ &= u_x\langle +z| + z\rangle - iu_y\langle +z| + z\rangle + u_z\langle +z| - z\rangle \\ &= u_x - iu_y\end{aligned}$$

et symétriquement $\langle +z|\sigma.\mathbf{u}| - z\rangle = u_x + iu_y$.

On en déduit

$$\begin{aligned}E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) &= \frac{1}{2}(-u_{a,z}u_{b,z} - u_{a,z}u_{b,z} - (u_{a,x} - iu_{a,y})(u_{b,x} + iu_{b,y}) - (u_{a,x} + iu_{a,y})(u_{b,x} - iu_{b,y})) \\ &= -\mathbf{u}_a.\mathbf{u}_b.\end{aligned}$$

1.3 Les inégalités de Bell

1. Selon la mécanique quantique, le système est entièrement décrit par le ket $|\psi\rangle$, donc en particulier, si on répète l'expérience décrite, l'état initial est toujours le même. Le résultat n'est pas toujours le même à cause de l'indéterminisme fondamental du processus de la mesure. Ici on fait l'hypothèse que pour décrire le système il existe une variable supplémentaire, dont on ne maîtrise pas la préparation : l'état initial des expériences diffère à chaque nouvel essai, ce qui explique les différences dans les résultats sans pour autant renoncer au déterminisme. A compléter...
2. La fonction A dépend de la direction de mesure choisie par Alice, mais pas de celle choisie par Bernard. C'est en cela que la théorie est locale, car Bernard pourrait se trouver à une très grande distance d'Alice. A compléter...
3. Par définition,
$$E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) = \frac{4}{\hbar^2} \int_\Lambda \mathcal{P}(\lambda) A(\lambda, \mathbf{u}_a) B(\lambda, \mathbf{u}_b) \mathrm{d}\lambda.$$
4. En utilisant l'expression précédente, on peut écrire
$$S(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) = \int_\Lambda \mathcal{P}(\lambda) S(\lambda, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) \mathrm{d}\lambda$$
avec
$$\begin{aligned} S(\lambda, \mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) &= A(\lambda, \mathbf{u}_a) B(\lambda, \mathbf{u}_b) + A(\lambda, \mathbf{u}_a) B(\lambda, \mathbf{u}'_b) \\ &\quad + A(\lambda, \mathbf{u}'_a) B(\lambda, \mathbf{u}'_b) - A(\lambda, \mathbf{u}'_a) B(\lambda, \mathbf{u}_b) \\ &= A(\lambda, \mathbf{u}_a)(B(\lambda, \mathbf{u}_b) + B(\lambda, \mathbf{u}'_b)) \\ &\quad + A(\lambda, \mathbf{u}'_a)(B(\lambda, \mathbf{u}'_b) - B(\lambda, \mathbf{u}_b)) \\ &= \pm\frac{\hbar^2}{2}. \end{aligned}$$
Pour passer à la dernière égalité, on remarque que l'une des deux lignes de l'égalité précédente est forcément nulle, et l'autre ligne donne alors le résultat. En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient alors $|S(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b)| \leq 2$.
5. Considérons
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \mathbf{e}_x \\ \mathbf{u}'_a &= \mathbf{e}_y \\ \mathbf{u}_b &= (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)/\sqrt{2} \\ \mathbf{u}'_b &= (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2} \end{aligned}$$
Alors $S(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) = -2\sqrt{2}$.
6. On peut déduire de ces résultats un test permettant d'exclure les théories à variables cachées locales du type envisagé ici. En effet le résultat précédent montre que la mécanique quantique viole les inégalités de Bell.

1.4 Tests expérimentaux

1. ...
2. Il y a essentiellement deux choses à vérifier. Il faut d'abord que la séparation spatiale entre les deux mesures soit suffisamment grande pour interdire une éventuelle communication à la vitesse de la lumière entre les deux instruments de mesure. Il faut aussi que l'efficacité des détecteurs soit suffisamment importante pour que les violations de l'inégalité de Bell ne soient pas explicables par une subtile corrélation entre le résultat de la mesure et le simple succès de la mesure. On pourrait imaginer que les événements non détectés par l'efficacité trop faible de l'appareil soient justement ceux qui rétabliraient l'inégalité de Bell. Ça n'est évidemment possible que si l'efficacité est faible.

2 Une autre version sous forme de devinette.

1. On peut se convaincre facilement que la seule solution est que les deux individus se mettent d'accord à l'avance sur une liste de réponses et que cette liste de réponses soit la même pour chacun. Dans le cas contraire, il y aura toujours une situation où les deux individus ne répondront pas la même chose alors qu'on leur pose pourtant la même question à chacun. Il y a donc $2^3 = 8$ stratégies (assez triviales) possibles.
2. Les 8 stratégies précédentes se séparent en deux catégories, soit on a dans la liste des réponses prédéterminées trois fois la même chose (par exemple les deux individus choisissent de répondre systématiquement oui à A, B et C) soit on a deux réponses identiques et une différente (par exemple les deux individus choisissent de répondre oui à A, non à B et non à C). Dans le premier cas, la fréquence avec laquelle les individus répondent la même chose lorsque l'on pose des questions différentes vaut 1, dans le second cas elle vaut 1/3 ce qui est toujours supérieur à 1/4. Aucune stratégie classique ne peut expliquer pourquoi les individus arrivent à avoir des réponses aussi anti-corrélées.
3. On choisit trois opérateurs $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ et $\mathcal{O}_C$. Intuitivement, on a envie qu'ils aient des vecteurs propres les plus éloignés, i.e. qui aient entre eux le plus petit produit scalaire possible pour obtenir une anticorrélation maximale. On choisit donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_A &= |+\rangle\langle+| \\ \mathcal{O}_B &= |2\pi/3\rangle\langle 2\pi/3| \\ \mathcal{O}_C &= |-2\pi/3\rangle\langle -2\pi/3|\end{aligned}$$

   Où on a noté (cette notation n'est pas générique) :

$$|\pm 2\pi/3\rangle = \cos\frac{\pm 2\pi}{3}|+\rangle + \sin\frac{\pm 2\pi}{3}|-\rangle = \pm\frac{1}{2}|+\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|-\rangle$$

   On vérifie ensuite facilement que pour deux opérateurs différents mesurés de chaque côté, la fréquence de réponses identiques vaut exactement 1/4.