Mécanique quantique – L2

Chayma Bouazza – Antoine Bourget – Sébastien Laurent

Séance du 6 novembre 2015 - `http://www.phys.ens.fr/~ bourget/`

TD 4 : Autour du théorème de Bell

---

1 Inégalités de Bell

1.1 L'indéterminisme quantique

Considérons une particule de spin 1/2 préparée dans l'état $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle - |-z\rangle)$.

1. On mesure le spin de la particule selon l'axe z. Quels sont les résultats possibles, et avec quelles probabilités ?
2. On choisit maintenant de mesurer le spin selon l'axe x. Quels sont les résultats possibles, et avec quelles probabilités ?

Pour la mécanique quantique ces résultats sont probabilistes par essence, mais on peut se demander s'il existe des théories déterministes *et locales* qui permettrait de reproduire ces résultats. L'objet de ce problème, fortement inspiré de [1], est de concevoir un test expérimental permettant de trancher cette question sans avoir à recourir à des arguments uniquement philosophiques ou métaphysiques.

1.2 L'argument EPR

On considère un système composé de deux particules de spin 1/2, que l'on prépare dans l'état initial

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z;-z\rangle - |-z;+z\rangle). \tag{1}$$

La notation $|+z;-z\rangle$ est un raccourci pour $|+z\rangle \otimes |-z\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, avec $\mathcal{H}_i$ l'espace de Hilbert à deux dimensions décrivant l'état de la particule i. La particule a se dirige vers Alice qui va effectuer une mesure du spin le long de l'axe de vecteur unitaire $\mathbf{u}_a$, et la particule b se dirige vers Bernard qui va effectuer une mesure du spin le long de l'axe de vecteur unitaire $\mathbf{u}_b$. On définit la fonction de corrélation $E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$ égale à la valeur moyenne du produit des résultats d'Alice et Bernard pour les directions $\mathbf{u}_a$ et $\mathbf{u}_b$, divisée par $\hbar^2/4$.

1. Montrer que si Alice et Bernard choisissent tous les deux le vecteur $\mathbf{e}_z$, il y a anti-corrélation parfaite dans les mesures. Comment cela s'exprime-t-il à l'aide de la fonction E ?
2. Montrer que le résultat subsiste quel que soit l'axe choisi par Alice et Bernard, pourvu qu'ils choisissent le même axe.
3. Que se passe-t-il s'ils choisissent des axes différents ? Calculer $E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$.

1.3 Les inégalités de Bell

Afin d'expliquer les résultats des mesures décrites dans la partie précédente de façon déterministes, on peut supposer (ce qui est contraire à la mécanique quantique) qu'il existe un paramètre supplémentaire $\lambda \in \Lambda$ dont la connaissance permettrait de déterminer le résultat d'une mesure de spin sans avoir à effectuer celle-ci. On dit que λ est une *variable cachée*, pour insister sur le fait qu'elle n'est pas accessible au physicien qui utilise la mécanique quantique. On suppose donc qu'il existe une fonction $A(\lambda, \mathbf{u}_a) = \pm\hbar/2$ pour Alice et une fonction $B(\lambda, \mathbf{u}_b) = \pm\hbar/2$ pour Bernard qui donne le résultat des mesures.

1. Pourquoi cette hypothèse est-elle contraire aux postulats de la mécanique quantique ?
2. Le raisonnement qui va suivre est basé sur l'hypothèse fondamentale de localité de la physique. En quoi cette hypothèse a-t-elle été utilisée dans la définition des fonctions A et B ?
3. Soit $\mathcal{P}$ la loi de répartition de la variable λ. Cette loi est *a priori* inconnue, nous savons seulement que
$$\forall\lambda \in \Lambda,\ \mathcal{P}(\lambda) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_\Lambda \mathcal{P}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1. \tag{2}$$
Donner l'expression de $E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$ en fonction de $\mathcal{P}$, $A(\lambda, \mathbf{u}_a)$ et $B(\lambda, \mathbf{u}_b)$.
4. On définit maintenant
$$S(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) = E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b) + E(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}'_b) + E(\mathbf{u}'_a, \mathbf{u}_b) - E(\mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b). \tag{3}$$
Montrer que pour une théorie à variables cachées, on a toujours $|S(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b)| \leq 2$. Ce résultat est le théorème de Bell.
5. Montrer que dans le cadre de la mécanique quantique, il existe un choix des vecteurs $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b$ tels que $S(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b, \mathbf{u}'_a, \mathbf{u}'_b) = -2\sqrt{2}$.
6. Que peut-on en déduire ?

1.4 Tests expérimentaux

1. Lire le "News and views" de Nature écrit par Alain Aspect sur les inégalités de Bell.
2. À quoi faut-il faire attention pour que le résultat de l'expérience ne soit pas ambigu ?

2 Une autre version sous forme de devinette.

On peut présenter le théorème de Bell sous une forme un peu différente pour insister sur l'impossibilité de la localité. Cette présentation du théorème via une simple expérience de pensée est due à Tim Maudlin[3] mais a été reprise par Jean Bricmont[2].

2.1 Une expérience classiquement inexplicable

On imagine trois questions A, B et C auxquelles on ne peut donner qu'une réponse binaire, «oui» ou «non». On imagine deux individus. Ils sont d'abord réunis au centre d'une pièce et peuvent discuter autant qu'ils le veulent, établir autant de stratégies subtiles qu'ils le souhaitent.

Ils savent juste qu'on va leur poser à chacun une des trois questions. Puis on les sépare et on les met chacun dans un bunker étanche, l'un sur Terre et l'autre sur Mars par exemple. On leur pose ensuite à chacun une question, le choix de la question étant aléatoire. Par exemple A sur Terre et C sur Mars. On note les deux réponses. On réitère ensuite l'expérience un nombre arbitrairement grand de fois. On remarque deux points :

- Lorsque la même question est posée sur Terre et sur Mars, les deux individus répondent tout le temps la même chose, i.e. la corrélation entre leurs deux réponses est parfaite.
- Lorsque deux questions différentes ont été posées, par exemple B sur Terre et C sur Mars, les deux individus ne répondent la même chose qu'en moyenne une fois sur quatre.

1. Montrer que les seules stratégies (classiques [1]) compatibles avec le premier point sont très simples et les énumérer.
2. Montrer que les stratégies précédemment trouvées sont incompatibles avec le second point.

2.2 Une explication quantique

Le problème (un peu plus difficile) est de montrer que la mécanique quantique rend possible la situation précédente.

1. Si les deux individus partagent l'état intriqué $|\psi\rangle$ du premier exercice, montrer que l'on peut rentre compte des deux faits précédents en choisissant trois bonnes mesures que chaque individu doit faire sur $|\psi\rangle$ en fonction de la question qui est posée [2].

Cette expérience de pensée montre essentiellement la même chose que le théorème de Bell, c'est à dire qu'il existe des situations où des corrélations sont inexplicables lorsque l'on suppose que la physique est purement locale. Le rôle de la théorie à variable cachées est ici jouée par l'ensemble des stratégies (locales) possibles, c'est à dire les stratégies n'utilisant aucune forme de communication entre les deux individus (fut elle subtile comme l'intrication). Cette preuve moins générale a l'avantage de mettre plus l'accent sur la non localité que sur l'indéterminisme. On ne peut pas reproduire la mécanique quantique avec une théorie locale (déterministe ou aléatoire) mais on peut la reproduire avec une théorie non-locale (déterministe ou non [3]).

Références

[1] Jean-Louis Basdevant, Jean Dalibard, and Manuel Joffre. *Mécanique quantique.* Editions Ecole Polytechnique, 2002.

[2] Jean Bricmont, Hervé Zwirn, and Thierry Martin. *Philosophie de la mécanique quantique.* Vuibert, 2009.

[3] Tim Maudlin. *Quantum non-locality and relativity : Metaphysical intimations of modern physics.* John Wiley & Sons, 2011.

1. On entend par là toutes les stratégies n'utilisant pas le partage d'états quantiques intriqués.
2. La réponse que fournit l'individu est alors simplement le résultat que lui donne sa mesure. Par exemple "oui" pour la première valeur propre et "non" pour la seconde.
3. La théorie de De Broglie-Bohm est compatible avec les prédictions de la mécanique quantique non relativiste tout en étant purement déterministe, l'aléa venant d'une méconnaissance des conditions initiales. L'existence de cette théorie reste compatible avec le théorème de Bell car elle est non-locale.