Mécanique quantique – Corrigé du TD 2

Chayma Bouazza – Antoine Bourget – Sébastien Laurent

1 Fonctions d'opérateurs

1. Il suffit de tester contre les vecteurs propres de A qui forment une base complète de l'espace de Hilbert considéré.
2. Remarquons d'abord que la définition proposée a bien un sens : on définit l'action $f(\hat{A})$ sur l'ensemble des opérateurs $\hat{A}$ de l'espace de Hilbert considéré par l'action bien définie de f sur un scalaire complexe λ_α. L'opérateur $f(\hat{A})$ est alors une observable ssi il est hermitique ($f(\hat{A}) = f(\hat{A})^\dagger$) ssi toutes ses valeurs propres sont réelles ($\forall\alpha,\ f(\lambda_\alpha) \in \mathbb{R}$).
3. Encore une fois, il suffit de tester contre les vecteurs propres de A.
4. Le polynôme caractéristique de $\hat{R}$ est $\chi_{\hat{R}}(X) = X^2 - 1$, et les valeurs propres de $\hat{R}$ sont ± 1. La diagonalisation s'écrit alors :
$$\hat{R} = P\hat{D}P^{-1} \text{ avec } P = P^\dagger = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
On démontre alors (cf. question suivante) que
$$f(\hat{R}) = Pf(\hat{D})P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
On remarque alors que les valeurs propres $e^{\pm i\theta}$ de $f(\hat{R})$ ne sont pas réelles (sauf pour quelques valeurs particulières de θ) et donc $f(\hat{R})$ n'est pas une observable en général. En revanche, $f(\hat{R})$ est unitaire : ses valeurs propres sont de module 1.
5. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N},\ (\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U})^n = \hat{U}^\dagger\hat{A}\underbrace{\hat{U}\hat{U}^\dagger}_{\mathbb{I}}\hat{A}\hat{U}\dots\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{A}^n\hat{U}$.
Par linéarité, on obtient ensuite le résultat demandé.
6. Sans hypothèse sur $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, on obtient :
$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$
7. Montrons par récurrence sur n que $\forall n, [\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$.
Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la relation est triviale. Supposons la relation vraie au rang n, alors :
$$[\hat{A}, \hat{B}^{n+1}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}^n] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^n = (n+1)\hat{B}^n[\hat{A}, \hat{B}]$$
Remarquons qu'est intervenu au cours du calcul le fait que $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$. La propriété demandée est néanmoins fort utile : la physique quantique est pleine de couple d'opérateurs qui ne commutent pas entre eux, mais commutent avec leur propre commutateur : $\hat{X}$ et $\hat{P}$, a et $a^\dagger$ (voir le cours sur l'oscillateur harmonique)...
Par linéarité, on obtient alors :
$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = \sum_n a_n[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_n na_nB^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] = f'(B)[\hat{A}, \hat{B}].$$
8. Faire commuter un opérateur avec un autre a les mêmes propriétés qu'une dérivation.

2 Opérateur densité

1. On a par définition :
$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$
2. En dérivant l'équation précédente on obtient : $\partial|\psi(t)\rangle = \partial_t U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$ on peut maintenant ré-exprimer $\partial|\psi(t)\rangle$ à l'aide de l'équation de Schrödinger qui donne :
$$\partial|\psi(t)\rangle = \frac{H}{i\hbar}|\psi(t)\rangle = \frac{H}{i\hbar}U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$
Soit finalement :
$$i\hbar\partial_t U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = HU(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$
Équation qui est valable pour toute condition initiale $|\psi(t_0)\rangle$ et donc qui est vérifiée par l'opérateur U directement : $i\hbar\partial_t U(t,t_0) = HU(t,t_0)$
3. Il suffit de dériver T. On a :
$$i\hbar\partial T = i\hbar\partial_t(U^\dagger)U + i\hbar U^\dagger\partial_t(U)$$
Pour calculer $i\hbar\partial_t(U^\dagger)$ il faut prendre l'adjoint de l'équation de la question précédente en n'oubliant pas de conjuguer i.
$$U^\dagger H = -i\hbar\partial_t U^\dagger$$
Soit finalement :
$$i\hbar\partial T = -U^\dagger HU + U^\dagger HU = 0$$
Or initialement $T(t_0,t_0) = U^\dagger(t_0,t_0)U(t_0,t_0) = Id\cdot Id = Id$, donc $T = Id$. Physiquement, l'unitarité de U est associée à la conservation de la probabilité.
4. $\partial_t U = \frac{H}{i\hbar}U$ équation qui s'intègre immédiatement en exponentiant :
$$U(t,t_0) = e^{\frac{H}{i\hbar}(t-t_0)}$$
Attention cette égalité est fausse si H dépend du temps et ne se généralise pas facilement car il n'est pas garanti que H commute avec lui même à des temps différents. En général :
$$U(t,t_0) \neq e^{\int_{t_0}^{t}\frac{H(u)}{i\hbar}du}$$

3 L'effet Zénon quantique

1. Les équations d'évolution temporelle de $a(t)$ et $b(t)$ s'écrivent sous forme matricielle :
$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot a\\ \dot b\end{pmatrix} = \hbar\Omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \hbar\Omega\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$$
2. Avec la condition initiale $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$, on trouve :
$$|\psi(t)\rangle = \cos(\Omega t)|1\rangle - i\sin(\Omega t)|2\rangle.$$

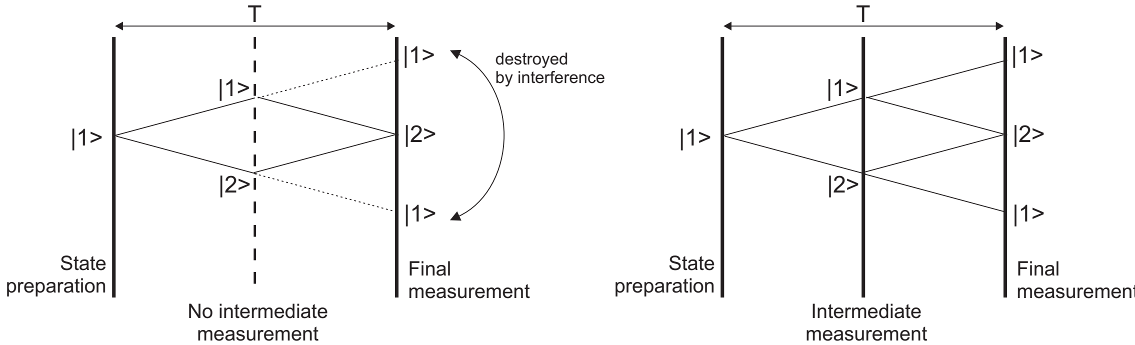

FIGURE 1 – Une remise à zéro (par projection sur l'état propre associé au résultat de la mesure) à $T/2$ diminue l'effet de l'oscillation de Rabi. Si aucune mesure n'est réalisée, l'oscillation de Rabi complète détruit totalement la composante de l'état sur $|1\rangle$.

3. La probabilité de mesurer le système dans l'état $|2\rangle$ au temps t est alors :

$$P_2 = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(\Omega t).$$

4. Pour $\Omega t = \pi/2 + k\pi$ (avec k entier naturel), $P_2 = 1$: le système peut alors être détecté avec certitude dans l'état $|2\rangle$. On note donc $T = \pi/2\Omega$.
5. La probabilité de transition $1 \to 2$ (ou $2 \to 1$) est ici sur une durée $T/2$:

$$p_{1\to 2} = p_{2\to 1} = \frac{1}{2}.$$

On a finalement en utilisant simplement les probabilités conditionnelles (on a le droit, puisque l'on effectue une mesure au milieu, de conditionner sur le résultat de cette mesure) :

$$P_{1\to 2} = p_{1\to 2}p_{2\to 2} + p_{1\to 1}p_{1\to 2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Résultat à comparer à la probabilité unité qu'on obtiendrait si on n'effectuait pas de mesure au temps $T/2$. Dans ce cas, les interférences entre les chemins $1 \to 2 \to 2$ et $1 \to 1 \to 2$ augmentent la probabilité.
6. On s'intéresse maintenant au cas général. Sur un temps T/n, les probabilités de transition deviennent :

$$p_{1\to 2} = p_{2\to 1} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \text{ et } p_{1\to 1} = p_{2\to 2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Pour établir la formule demandée, il suffit alors de remarquer que $1 - P(i,n)$ représente simplement la probabilité que le système soit dans l'état $|1\rangle$ à $t_i = iT/n$.

7. Les $P(i,n)$ constituent en fait une suite arithmético-géométrique :

$$\begin{aligned}
P(i+1,n) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) P(i,n) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)(1-P(i,n)) \\
P(i+1,n) &= \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) P(i,n) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\
P(i+1,n) - \frac{1}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(P(i,n) - \frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow P(n,n) - \frac{1}{2} &= \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(P(0,n) - \frac{1}{2}\right) \\
P(n,n) &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

   en utilisant la condition initiale $P(0,n) = 0$.
8. L'accord est très bon, dans la limite de $\pm 2\%$, avec la troisième colonne.
9. On peut notamment prendre en compte la durée finie des $n-1$ mesures intermédiaires effectuées. C'est effectivement le principal effet pris en compte pour raffiner le modèle (d'autres sortent du cadre de ce module). Avec une durée de mesure de 2.4 ms, on voit par exemple que pour $n = 16$, 15% du temps est consacré à ces séquences de mesure, ce qui peut expliquer en partie la baisse de $P(n,n)$. Cela dit, toujours pour $n = 16$, la probabilité finale est diminuée par un facteur 10...
10. Un développement limité donne dans la limite $n \to \infty$:

$$P(n,n) \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \exp\frac{-\pi^2}{2n}\right).$$

11. Donc, si $n \to \infty$, $P(n,n) \to 0$ et le système tend à rester dans l'état $|1\rangle$: l'évolution semble gelée par l'observation.

    Cet effet est appelé *effet Zénon quantique* par référence aux paradoxes de Zénon de Citium, notamment celui sur l'impossibilité (apparente...) du mouvement.