

Mécanique quantique – Corrigé du TD 1

Chayma Bouazza – Antoine Bourget – Sébastien Laurent

1 Expérience d'interférences avec des atomes

L'expérience a été réalisée avec des atomes ^4He pour plusieurs raisons :

- faible masse (ce qui augmente la longueur d'onde de de Broglie des atomes, et facilite l'observation des interférences)
 - atome inerte chimiquement (puisqu'il est dans la dernière colonne de la classification), ce qui évite qu'il n'endommage les structures utilisées pour diffracter le faisceau et pour réaliser les fentes d'Young
 - l'atome possède un état métastable (d'une durée de vie de plusieurs milliers de secondes, l'infini à l'échelle de cette expérience!), ce qui facilite sa détection (car un atome qui percute le détecteur y perd ses 20 eV d'énergie interne)
 - on sait (et on savait déjà) en réaliser des sources relativement intenses
1. La longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} est donnée par $\lambda_{\text{dB}} = h/mv$, donc pour des atomes thermiques pour lesquels la vitesse quadratique moyenne v_{qm} est donnée par $\frac{1}{2}mv_{\text{qm}}^2 \simeq \frac{1}{2}k_{\text{B}}T$, on obtient :

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq \frac{h}{\sqrt{mk_{\text{B}}T}} \simeq 1,3 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad (1)$$

soit 1,3 Å pour une température de la source $T = 295 \text{ K}$.

Insistons sur le fait qu'il s'agit d'un **ordre de grandeur** : la distribution des vitesses dans un jet est différente de celle dans une enceinte (sans surprise, les molécules les plus rapides sont celles qui ont le plus de chances de sortir de l'enceinte et elles sont donc surreprésentées dans le jet).

2. La fente d'entrée garantit un éclairage cohérent des deux fentes. En effet, l'angle de diffraction est $\theta = \lambda_{\text{dB}}/s_1 \simeq 5 \times 10^{-5} \text{ rad}$, si bien que $\theta L \simeq 30 \mu\text{m} \gg d$.
3. Si on ne tient compte que de l'effet d'interférence entre les deux fentes, on s'attend à une figure d'interférences à deux ondes de la forme :

$$I(x) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \phi) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi dx}{\lambda_{\text{dB}} L'} \right), \quad (2)$$

où $\phi = 2\pi\delta/\lambda_{\text{dB}}$ est le déphasage entre les deux chemins (avec $\delta \simeq xd/L'$).

On s'attend ainsi à un interfrange $\Lambda = L'\lambda_{\text{dB}}/d$.

Sa valeur mesurée sur l'énoncé (courbe *a* de la figure 2) correspond à une longueur de 2,7 cm pour 5 interfranges, alors que le repère de 10 μm correspond à 1,2 cm. On en déduit un interfrange $\Lambda = (2,7 \times 10)/(5 \times 1,2) = 4,5 \mu\text{m}$ (l'article mentionne effectivement une valeur de $4,5 \pm 0,6 \mu\text{m}$).

Cette valeur correspond à une longueur d'onde $\lambda_{\text{dB}} = 0,56 \text{ Å}$, en bon accord avec l'ordre de grandeur calculé plus haut (avec les limites déjà évoquées).

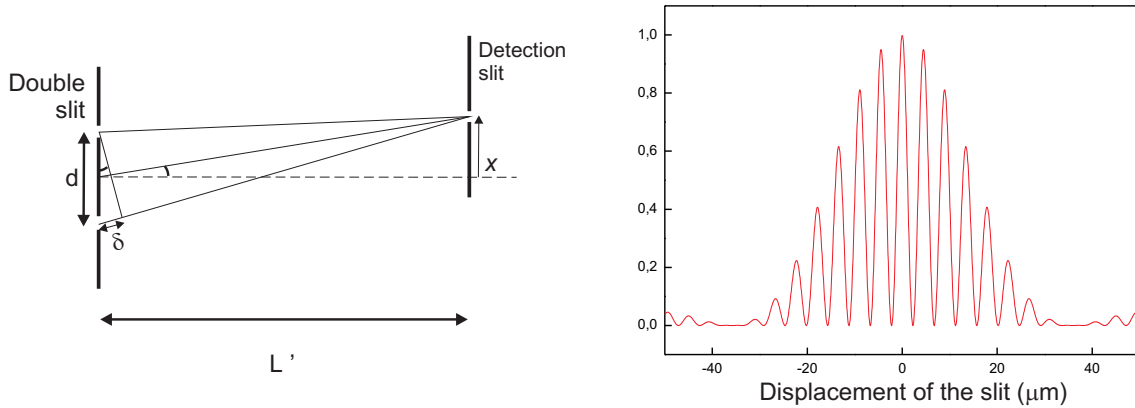


FIGURE 1 – Gauche : notations et principe du calcul de la figure d’interférences des deux fentes d’Young. Droite : figure d’interférences attendue pour les paramètres de l’expérience, avec $\lambda_{dB} = 0,56 \text{ \AA}$.

Pour $T = 83 \text{ K}$, on trouve respectivement $8,4 \mu\text{m}$ d’interfrange et une longueur d’onde de $1,03 \text{ \AA}$, en excellent accord avec la dépendance attendue en $1/\sqrt{T}$ (voir l’éq. 1).

4. On peut citer comme facteurs qui limitent la visibilité des interférences :
 - largeur de la fente source, qui induit une distribution des vitesses transverses
 - largeur finie des fentes, qui module la figure d’interférence par un terme de la forme $\text{sinc}^2(\pi s_2 x / \lambda_{dB} L')$ (dont on a tenu compte pour tracer la courbe de la figure 1). Pour les paramètres de l’expérience, on peut s’attendre à voir une dizaine de franges avec un bon contraste sur l’ensemble de la figure d’interférences.
 - distribution des vitesses et donc des longueurs d’onde : c’est l’équivalent d’une expérience d’interférences en lumière blanche !
 - éventuellement, la largeur de la fente de détection ; mais ici, elle est nettement plus petite que l’interfrange ($1 \mu\text{m}$ contre $5 \text{ à } 8 \mu\text{m}$), donc cet effet joue peu.
 - enfin le principe de superposition pourrait n’être qu’une approximation (comme dans les théories *GRW*, pour Girhardi-Rimini-Weber et *CSL*, pour Continuous Stochastic Localization qui sont deux alternatives à la mécanique quantique). C’est d’ailleurs en partie pour tester ce genre d’hypothèses que ces expériences d’interférences sont réalisées.
5. Si on réalisait l’expérience avec un jet issu d’une enceinte thermalisée, on aurait une dispersion des vitesses Δv du même ordre que la vitesse moyenne \bar{v} , ce qui limiterait drastiquement le contraste. On réalise en fait une détente supersonique du gaz d’hélium, qui permet d’obtenir un rapport $\bar{v}/\Delta v \simeq 15 \text{ à } 20$.
6. On peut songer à plusieurs difficultés :
 - la masse étant (beaucoup) plus élevée, la longueur d’onde λ_{dB} sera très petite (de l’ordre de quelques pm)
 - il faudra donc utiliser des structures diffractantes encore plus petites (dans l’article cité, des fentes d’un demi μm de large, espacées d’ $1 \mu\text{m}$)
 - se pose éventuellement le problème de réaliser la sélection de vitesses (dans l’expérience, on sélectionne une classe de vitesses en interposant des fentes de

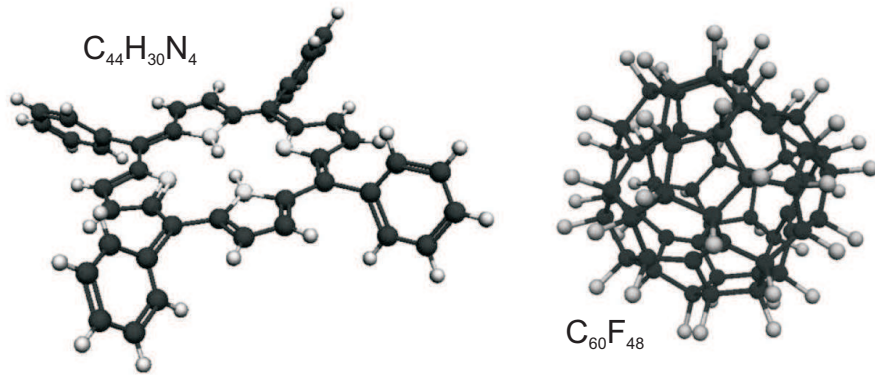


FIGURE 2 – Molécules complexes utilisées dans des expériences d'interférométrie : tetraphenylporphyrine (TPP) $C_{44}H_{30}N_4$ et fluorofullèrene $C_{60}F_{48}$.

sélection le long de la parabole de chute libre des molécules correspondant à une certaine vitesse)

- les molécules étant beaucoup plus grosses, elles seront beaucoup plus sensibles à l'effet des collisions dans le vide résiduel de l'interféromètre (on peut en effet considérer une collision comme un processus de mesure qui peut permettre de distinguer les deux chemins)

Bibliographie complémentaire :

Effet des collisions sur le contraste

K. Hornberger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 160401 (2003).

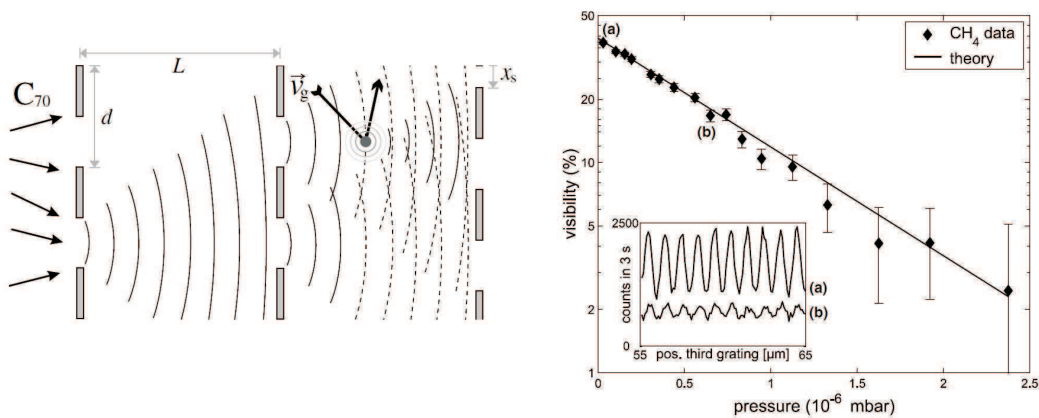


FIGURE 3 – Effet des collisions sur le contraste des interférences. Gauche : Schéma de l'interféromètre utilisé (en champ proche, différent de celui discuté dans le TD) avec des molécules de fullérènes C_{70} . Le troisième réseau sert de détecteur. Les collisions avec les molécules de gaz localisent la fonction d'onde des molécules et réduisent la visibilité des interférences observées. Droite : Résultats expérimentaux. La ligne pleine correspond à la prévision théorique. L'insert présente deux exemples de figures observées à $0,05$ et $0,6 \times 10^{-6}$ mbar.

Quelques remarques pour finir...

L'expérience décrite a eu les honneurs de la première page de *Physical Review Letters*, juste avant une expérience concurrente dont l'article a été soumis trois jours après...

VOLUME 66

27 MAY 1991

NUMBER 21

Young's Double-Slit Experiment with Atoms: A Simple Atom Interferometer

O. Carnal and J. Mlynek

Fakultät für Physik, Universität Konstanz, D-7750 Konstanz, Germany
(Received 4 March 1991)

An Interferometer for Atoms

David W. Keith, Christopher R. Ekstrom, Quentin A. Turchette, and David E. Pritchard

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139
(Received 7 March 1991)

FIGURE 4 – Entêtes des deux articles d'interférométrie atomique publiés à la suite dans *Phys. Rev. Lett.* (pages 2689 et 2693) en mai 1991.

A noter dès le premier paragraphe du second article :

"There have been several recent proposals for the realization of an atom interferometer, and a number of experiments have demonstrated interference of atoms. In addition to the work reported here, several groups have demonstrated interference fringes.³ We report the demonstration of the first interferometer for atoms in the sense that it uses amplitude division to separate the beams in momentum and distinctly separates the beams in space.⁴"

Pour ceux qui n'auraient pas bien compris la distinction entre cette expérience et celle de Mlynek (la référence 3, celle où on démontre "des franges", pas "un interféromètre"), la référence 4 enfonce le clou :

"Devices such as the one presented here in which wave fronts are divided (using either wave-front or amplitude division), spatially separated, and purposefully recombined (e.g., using reflection or refraction) are **universally** (n'ayons pas peur des mots) referred to as interferometers. When all these conditions are not met, there is a division of opinion. In particular (et au hasard...), **Young's experiment** (comprendre "Mlynek's experiment") is not generally classed as an interferometer [e.g., M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon, New York, 1980), 6th ed., Chap. VII] (avec la référence qui tue pour finir : un jour ou l'autre, vous consulterez cette bible de l'optique).

2 Une expérience sur la règle de Born

1. L'amplitude lumineuse est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B$, donc l'intensité détectée au point \mathbf{r} est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{AB}(\mathbf{r}) &= |\mathcal{E}_A(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_B(\mathbf{r})|^2 \\ &= (|\mathcal{E}_A|^2 + |\mathcal{E}_B|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{E}_A^* \mathcal{E}_B)) \\ &= (P_A + P_B + I_{AB}) \end{aligned}$$

On déduit de cette relation $I_{AB} = P_{AB} - P_A - P_B$.

2. Avec les trois fentes ouvertes, $P_{ABC}(\mathbf{r}) = |\mathcal{E}_A(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_B(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_C(\mathbf{r})|^2$ a priori. On ajoute un terme I_{ABC} , non prévu par la mécanique quantique mais qui pourrait exister dans une théorie plus générale. On obtient alors :

$$\begin{aligned} P_{ABC}(\mathbf{r}) &= |\mathcal{E}_A(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_B(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_C(\mathbf{r})|^2 + I_{ABC} \\ &= (P_A + P_B + P_C) + (I_{AB} + I_{AC} + I_{BC}) + I_{ABC} \\ &= (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC} - P_A - P_B - P_C + I_{ABC}) \\ \Rightarrow I_{ABC} &= P_{ABC} - (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC}) + P_A + P_B + P_C \end{aligned}$$

3. Dans le cadre de la mécanique quantique $I_{ABC} = 0$ donc $\kappa = 0$.

On doit donc mesurer la valeur $\kappa = 0$: tout autre résultat invaliderait la théorie quantique actuelle, la précision de la mesure du 0 permettant de mettre une borne sur les déviations à la règle de Born.

Les expériences sont réalisées avec différentes sources lumineuses : un laser (puissance de $1 \mu\text{W}$, soit un flux de 5×10^{-12} photons/s), le même atténué (200 fW, $\simeq 10^6$ photons/s) ou une source de photons uniques ($\simeq 40\,000$ photons/s).

Les résultats sont compatibles (aux incertitudes expérimentales près) avec la valeur $\kappa = 0$, sauf pour le faisceau laser, pour lequel on a une violation apparente de l'ordre de 0,7% : on peut donc considérer qu'on a vérifié cette théorie à cette précision-là. Une forme explicite de la violation attendue (un terme en $|\mathcal{E}|^3$ par exemple) permet de quantifier plus précisément cette violation.

Il s'agit de la première expérience effectuée sur la règle de Born, mais d'autres sont envisagées pour accroître la précision des mesures et le domaine de validité, par exemple avec des ondes atomiques.

4. On peut en théorie tester la règle de Born avec deux fentes : il suffit de comparer la figure d'interférences obtenue à celle prédite. Mais cela impliquerait de connaître parfaitement la forme des fentes (et de leurs défauts). L'intérêt d'utiliser trois fentes est justement qu'à condition d'utiliser **tout le temps les trois mêmes fentes**, on a une relation simple entre les différentes figures d'interférences (à une, à deux et à trois fentes).
5. Utiliser la combinaison des trois fentes fixes et du masque (avec une, deux ou trois fentes) permet de réaliser la condition essentielle soulignée ci-dessus : avoir tout le temps les trois mêmes fentes. Il suffit en effet que les trois fentes fixes soient suffisamment plus fines que celles du masque pour que la combinaison des deux le réalise en pratique, indépendamment des défauts des différentes fentes du masque.