Mécanique quantique – Corrigé du TD 10

Chayma Bouazza - Antoine Bourget - Sébastien Laurent

TD 11 : Violation de la parité

---

1. Le système doit rester dans un état propre de $\hat{\mathbf{J}}^2$ et $\hat{J}_z$, donc on est toujours dans l'état $|j = 1/2, m_j = 1/2\rangle$
2. On a deux particules, donc de manière générale, le moment cinétique total s'écrit :
$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2 + \hat{\mathbf{L}}_{12}$$
Ici, seul le proton a un spin non nul, donc cette expression se ramène à
$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}}$$
Pour connaître les valeurs permises pour l, on considère le problème inverse : on ajoute un moment cinétique l et $1/2$: il doit être possible d'obtenir un moment total $j = 1/2$. On sait que $|l - 1/2| \leq j \leq l + 1/2$, donc $l = 0$ ou $l = 1$. D'autre part, $m_j = m_l + m_s$. Puisque $m_s = \pm 1/2$, on ne peut avoir que $m_l = 0$ ou $m_l = 1$.
3. Pour diagonaliser $\hat{\mathbf{J}}^2$ et J_z dans la base des états propres de $\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{L}_z, \hat{S}_z$, on rappelle l'action générale d'un opérateur $\hat{J}_-$: $\hat{J}_-|j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle$.
On sépare maintenant le problème en deux cas : $l = 0$ ou $l \neq 0$.
   — Si $l = 0$:
   alors $j = 1/2$, et il n'y a qu'un seul ket possible :
$$|j = 1/2, 0, 1/2, m_j\rangle = |0, m_l = 0, 1/2, m_s = m_j\rangle$$
   Cet état est diagonal pour tous les opérateurs qui nous intéressent.
   — Si $l \neq 0$, alors $j = l \pm 1/2$. Commençons par nous intéresser au cas $j = l + \frac{1}{2}$. Pour $m_j = j$, le ket décrivant le système est diagonal dans toutes les bases qui nous intéressent, soit :
$$|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l + 1/2\rangle = |l, m_l = l, 1/2, m_s = 1/2\rangle$$
   Notons qu'en théorie, ces deux états sont égaux à une phase près : le choix qui est fait ici permet de retrouver ensuite toutes les expressions usuelles des coefficients. En appliquant $\hat{J}_-$ à cet état, on a :
$$\hat{J}_-|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l + 1/2\rangle = \sqrt{2l+1}|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l - 1/2\rangle$$
   Par ailleurs, on connait l'action de $\hat{J}_-$ dans la base $|l, m_l, s, m_s\rangle$, puisque $\hat{J}_- = \hat{S}_- + \hat{L}_-$:
$$\begin{aligned} \hat{J}_-|l, m_l = l, 1/2, m_s = 1/2\rangle &= \hat{S}_-|l, m_l = l, 1/2, m_s = 1/2\rangle + \hat{L}_-|l, m_l = l, 1/2, m_s = 1/2\rangle \\ &= |l, m_l = l, 1/2, m_s = -1/2\rangle + \sqrt{2l}|l, m_l = l-1, 1/2, m_s = 1/2\rangle \end{aligned}$$

On peut donc finalement ecrire :

$$|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l - 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2l+1}}|l, m_l = l, 1/2, m_s = -1/2\rangle$$
$$+\sqrt{\frac{2l}{2l+1}}|l, m_l = l-1, 1/2, m_s = 1/2\rangle$$

Une seconde application de $\hat{J}_-$ sur ce nouveau vecteur donne de la même manière :

$$|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l - 3/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}|l, m_l = l-1, 1/2, m_s = -1/2\rangle$$
$$+\sqrt{\frac{2l-1}{2l+1}}|l, m_l = l-2, 1/2, m_s = 1/2\rangle$$

On peut donc déterminer par récurrence la forme prise par n'importe quel vecteur du sous-espace $j = l + 1/2$:

$$|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l - m_j + 1/2}{2l+1}}|l, m_l = m_j + 1/2, 1/2, m_s = -1/2\rangle$$
$$+\sqrt{\frac{l + m_j - 1/2}{2l+1}}|l, m_l = m_j - 1/2, 1/2, m_s = 1/2\rangle$$

Une fois que tout le sous-espace $j = l + 1/2$ est déterminé, on s'intéresse au vecteur du sous espace $j = l - 1/2$ et de m_j maximal, soit $m_j = l - 1/2$. On a déjà écrit un vecteur tel que $m_j = l - 1/2$: $|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l - 1/2\rangle$. Le nouveau vecteur cherché doit nécéssairement lui être orthogonal : en effet, ils sont tous les deux vecteurs propres de $\hat{\mathbf{J}}^2$, mais avec des valeurs propres différentes (s'ils n'étaient pas orthogonaux, ils auraient la même valeur propre associée, ce qui n'est évidemment pas vrai). Par ailleurs, il n'existe aucun autre vecteur tel que $m_j = l - 1/2$. Le vecteur cherché est l'unique vecteur orthogonal à $|j = l + 1/2, l, 1/2, m_j = l - 1/2\rangle$, donc c'est :

$$|j = l - 1/2, l, 1/2, m_j = l - 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}|l, m_l = l, 1/2, m_s = -1/2\rangle$$
$$-\sqrt{\frac{1}{2l+1}}|l, m_l = l-1, 1/2, m_s = 1/2\rangle$$

On peut maintenant appliquer la même méthode que précédemment : des applications répétées de $\hat{J}_-$ donnent tous les m_j possibles, en gardant j constant. Par récurrence, on peut donc ecrire :

$$|j = l - 1/2, l, 1/2, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l + m_j - 1/2}{2l+1}}|l, m_l = m_j + 1/2, 1/2, m_s = -1/2\rangle$$
$$-\sqrt{\frac{l - m_j + 1/2}{2l+1}}|l, m_l = m_j - 1/2, 1/2, m_s = 1/2\rangle$$

On a donc bien démontré les expressions des coefficients de Clebsch-Gordan dans le cas du couplage d'un spin l et d'un spin 1/2.

4. Une fois que la désintégration s'est produite, on peut ecrire le vecteur décrivant le système dans une superposition (arbitraire) de $l = 0$ et $l = 1$, à condition que chaque état respecte la conservation du moment cinétique. On peut donc "utiliser" les états suivants :

$$\begin{aligned}|j=1/2, l=1, 1/2, m_j=1/2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|l=1, m_l=1, 1/2, m_s=-1/2\rangle \\ &\quad -\sqrt{\frac{1}{3}}|l=1, m_l=0, 1/2, m_s=1/2\rangle \\ |j=1/2, l=0, 1/2, m_j=1/2\rangle &= |l=0, m_l=0, 1/2, m_s=1/2\rangle\end{aligned}$$

La superposition des deux états s'écrit alors

$$|\Psi\rangle = \alpha|j=1/2, l=1, 1/2, m_j=1/2\rangle \otimes |R_1\rangle + \alpha|j=1/2, l=0, 1/2, m_j=1/2\rangle \otimes |R_2\rangle$$

5. La probabilité recherchée résulte de l'intégration radiale de la densité de probabilité de présence :

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}^2\Omega} = \sum_{m_s=\pm 1/2} \int \langle\Psi|r,\theta,\phi,m_s\rangle\langle r,\theta,\phi,m_s|\Psi\rangle r^2 \mathrm{d}r$$

Pour calculer cette intégrale, on commence par écrire $|\Psi\rangle$ dans la base $|r,\theta,\phi\rangle \otimes |s,m_s\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle r,\theta,\phi|\Psi\rangle &= \alpha R_1(r)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1(\theta,\phi)|m_s=-1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0(\theta,\phi)|1/2\rangle\right) \\ &\quad +\beta R_2(r) Y_0^0(\theta,\phi)|1/2\rangle\end{aligned}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}|\langle\Psi|r,\theta,\phi,m_s\rangle|^2 &= \alpha^2|R_1(r)|^2\frac{2}{3}|Y_1^1(\theta,\phi)|^2 + \beta^2|R_2(r)|^2|Y_0^0(\theta,\phi)|^2 + \alpha^2|R_1(r)|^2\frac{1}{3}|Y_1^0(\theta,\phi)|^2 \\ &\quad -2\Re\left(\alpha\sqrt{\frac{1}{3}}\bar{\beta}R_1(r)\bar{R_2}(r)Y_1^0(\theta,\phi)Y_0^0(\bar{\theta},\phi)\right)\end{aligned}$$

Lors de l'intégration radiale, la première ligne donne exactement $\frac{1}{4\pi}$, et la seconde ligne donne $-2\Re(\alpha\bar{\beta}\langle R_2|R_1\rangle)\cos\theta/(4\pi)$. On trouve bien l'expression demandée, avec $\rho = -2\Re(\alpha\bar{\beta}\langle R_2|R_1\rangle)$.

6. Le Λ_0 est invariant par symétrie miroir [1], donc on attend que les résultats de mesure le soient aussi. En particulier, la probabilité d'émission doit être invariante par $\theta \to \pi - \theta$, donc on attend $\rho = 0$. Expérimentalement, on mesure $\rho \neq 0$, donc le processus mis en jeu dans la désintégration du Λ_0 brise la symétrie miroir. En toute rigueur, la *parité*, i.e. la transformation $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$ n'est pas exactement la symétrie miroir, il faut lui ajouter la simple rotation $\phi \to \phi + \pi$. Cependant on ne va pas jusqu'à mettre en doute l'isotropie de l'espace et cette rotation additionnelle est donc sans importance : une violation de la symétrie miroir est équivalente à une violation de la parité.

1. Cette affirmation peut sembler surprenante car le Λ_0 a un spin $m = +1/2$. Il faut cependant se souvenir que le spin est un pseudo vecteur et que la symétrie miroir (dans le plan x-y) ne change ainsi pas sa direction.