Physique des particules – L3

TD 9 (correction)

Exercice 1

1. Dans la limite non relativiste on a

$$E = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \approx m\left(1+\frac{\vec{v}^2}{2}\right), \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v} \approx m\vec{v}\,. \tag{1}$$

Par conséquent

$$p_a \cdot p_b = E_a E_b - \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b \approx m_a m_b \left(1 + \frac{\vec{v}_a^2 + \vec{v}_a^2 - 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{2}\right) = m_a m_b \left(1 + \frac{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2}{2}\right) \tag{2}$$

et

$$F = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \approx m_a m_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b|\,. \tag{3}$$

2. On commence par remarquer que (on rappelle que $\vec{v} = \vec{p}/E$ pour une particule libre)

$$\begin{aligned}
E_a^2 E_b^2 (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (p_a \cdot p_b)^2 &= E_b^2 \vec{p}_a^2 - 2E_a E_b \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b + E_a^2 \vec{p}_b^2 - (E_a^2 E_b^2 - 2E_a E_b \vec{p}_a \cdot \vec{p}_b + (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2) \\
&= E_b^2 \vec{p}_a^2 + E_a^2 \vec{p}_b^2 - E_a^2 E_b^2 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2 \\
&= (m_b^2 + \vec{p}_b^2)\vec{p}_a^2 + (m_a^2 + \vec{p}_a^2)\vec{p}_b^2 - (m_a^2 + \vec{p}_a^2)(m_b^2 + \vec{p}_b^2) - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2 \\
&= \vec{p}_a^2 \vec{p}_b^2 - (\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b)^2 - m_a^2 m_b^2\,.
\end{aligned}$$

Si les impulsions des deux particules sont colinéaires alors $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b = \pm|\vec{p}_a||\vec{p}_b|$ et on a bien

$$E_a^2 E_b^2 (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 = (p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2 = F^2\,. \tag{4}$$

3. Dans le référentiel du centre de masse les deux impulsions sont opposées donc colinéaires et le résultat de la question précédente entraîne

$$F = E_a^* E_b^* (|\vec{v}_a^*| + |\vec{v}_b^*|) = E_a^* E_b^* \left(\frac{|\vec{p}^*|}{E_a^*} + \frac{|\vec{p}^*|}{E_b^*}\right) = (E_a^* + E_b^*)|\vec{p}^*| = \sqrt{s}|\vec{p}^*|\,. \tag{5}$$

Exercice 2: Section efficace différentielle

1. On se place dans un référentiel dans lequel les vitesses de a et b sont colinéaires et de sens opposé (référentiel de collision frontale). Par définition de la section efficace, le taux de réaction est

$$\Gamma = \phi_a n_b V \sigma \tag{6}$$

avec

- n_a, n_b les densités des deux types de particules
- V est un volume arbitraire, qui disparaîtra à la fin des calculs.
- $\phi_a = n_a(v_a + v_b)$ le flux de particules de type a passant à travers un plan orthogonal à la direction du mouvement et se déplaçant à la vitesse $-v_b$.

On obtient donc

$$\sigma = \frac{V\Gamma}{v_a + v_b} \tag{7}$$

On utilise ensuite la règle d'or de Fermi

$$\Gamma = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta(E_a + E_b - E_1 - E_2)\delta^3(\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \tag{8}$$

ainsi que

$$\mathcal{M}_{fi} = \sqrt{(2E_1)(2E_2)(2E_a)(2E_b)}T_{fi} \tag{9}$$

et on trouve le résultat, en prenant $V = 1$. Ce résultat est invariant relativiste, et donc valable dans tous les référentiels.

2. Dans le référentiel du centre de masse, $F = 4|\vec{p}_i^*|\sqrt{s}$. Donc

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2 F}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2)\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{2E_1}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{2E_2} \tag{10}$$

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2 F}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2)\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{4E_1E_2} \tag{11}$$

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2 F}\int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + p_1^2} - \sqrt{m_2^2 + p_1^2})\frac{p_1^2 \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}\Omega}{4E_1E_2} \tag{12}$$

Posons $f(p_1) = \sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + p_1^2} - \sqrt{m_2^2 + p_1^2}$. On a $f(0) = \sqrt{s} - m_1 - m_2 > 0$ et la fonction est décroissante, donc elle a un unique zéro que l'on appelle $p^\star$: $f(p^\star) = 0$. On utilise la formule

$$\int g(p_1)\delta(f(p_1))\mathrm{d}p_1 = g(p^\star)|f'(p^\star)|^{-1}\,. \tag{13}$$

On calcule

$$|f'(p^\star)| = p^\star \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}\,. \tag{14}$$

Then

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2 F}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \left(p^\star \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2}\right)^{-1} \frac{(p^\star)^2 \mathrm{d}\Omega}{4E_1E_2} \tag{15}$$

$$\sigma = \frac{p_1^\star}{64\pi^2\sqrt{s}p_a^\star(E_1 + E_2)}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{p_1^\star}{p_a^\star} \tag{17}$$

3. Pour passer d'un référentiel à l'autre on effectue un boost Λ selon $\vec{e}_z$ donc les coordonnées selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont inchangées, en particulier pour $p_1 = \Lambda p_1^*$:

$$|\vec{p}_1|(\sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y) = |\vec{p}_i^*|(\sin\theta^*\cos\phi^*\vec{e}_x + \sin\theta^*\sin\phi^*\vec{e}_y)\,. \tag{18}$$

Cela entraîne en effet $\phi = \phi^*$ (mais aussi $|\vec{p}_1|\sin\theta = |\vec{p}_i^*|\sin\theta^*$).

4. On a

$$s = (p_a^* + p_b^*)^2 = p_a^{*2} + 2p_a \cdot p_b + p_b^{*2} = m_a^2 + 2E_a^*E_b^* + 2\vec{p}_i^{*2} + m_b^2 \tag{19}$$

soit

$$E_a^*E_b^* = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2} - \vec{p}_i^{*2} \Longrightarrow (m_a^2 + \vec{p}_i^{*2})(m_b^2 + \vec{p}_i^{*2}) = \left(\frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2} - \vec{p}_i^{*2}\right)^2 \tag{20}$$

donc

$$|\vec{p}_i^*| = \frac{\sqrt{(s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2)}}{2\sqrt{s}}\,. \tag{21}$$

On a aussi

$$s = (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2 \Longleftrightarrow E_a = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b}\,. \tag{22}$$

Enfin

$$\vec{p}_a^2 = E_a^2 - m_a^2 = \frac{(s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2)}{4m_b^2} \Longleftrightarrow m_b|\vec{p}_a| = \sqrt{s}|\vec{p}_i^*|\,. \tag{23}$$

5. On a $t = (p_a^* - p_1^*)^2 = m_a^2 - 2(E_a^*E_1^* - |\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|\cos\theta^*) + m_1^2$. Les valeurs de E_a^*, E_1^*, $|\vec{p}_i^*|$ et $|\vec{p}_f^*|$ sont fixées par la conservation de l'énergie impulsion, donc indépendantes de θ^* et ϕ^*, par conséquent

$$\mathrm{d}t = 2|\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|\mathrm{dcos}\,\theta^*\,. \tag{24}$$

On en déduit (on rappelle que $\phi = \phi^*$ et que $\mathrm{d}\Omega^* = -\mathrm{dcos}\,\theta^*\mathrm{d}\phi^*$)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^*}\left|\frac{\mathrm{d}\Omega^*}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi}\right| = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2 s}\frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|}\frac{1}{2|\vec{p}_i^*||\vec{p}_f^*|} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{128\pi^2 s\vec{p}_i^{*2}}\,. \tag{25}$$

La valeur absolue n'est là que par convention parce que l'on veut que le résultat soit positif : c'est une densité que l'on calcule.

6. Pour la première partie de la question il suffit d'écrire t dans le référentiel du laboratoire de deux façons différentes,

$$t = (p_b - p_2)^2 = (p_a - p_1)^2\,, \tag{26}$$

puis de développer les carrés en utilisant le fait que $\vec{p}_b = \vec{0}$ et que $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_1 = |\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta$:

$$t = m_2^2 - 2E_bE_2 + m_b^2 = m_a^2 + m_1^2 - 2E_1E_a + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta\,, \tag{27}$$

et enfin d'utiliser le fait que $E_b = m_b$ et la conservation de l'énergie $E_2 = E_a + E_b - E_1$ pour obtenir

$$t = m_2^2 - m_b^2 + 2m_b(E_1 - E_a) = m_a^2 + m_1^2 - 2E_1E_a + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\cos\theta\,. \tag{28}$$

On veut ensuite prendre une variation infinitésimale des égalités précédentes, il faut se rappeler que E_a est fixée (on l'a calculée à la question 2.) mais que E_1 et $|\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ ne le sont pas. Cela donne

$$\mathrm{d}t = 2m_b\mathrm{d}E_1 = -2E_a\mathrm{d}E_1 + 2|\vec{p}_a|\frac{\mathrm{d}|\vec{p}_1|}{\mathrm{d}E_1}\mathrm{d}E_1\cos\theta + 2|\vec{p}_a||\vec{p}_1|\mathrm{d}\cos\theta\,. \tag{29}$$

Puisque $\mathrm{d}|\vec{p}_1|/\mathrm{d}E_1 = E_1/|\vec{p}_1|$, la deuxième égalité implique bien

$$\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{|\vec{p}_a||\vec{p}_1|^2}{(E_a + m_b)|\vec{p}_1| - E_1|\vec{p}_a|\cos\theta}\,. \tag{30}$$

7. En utilisant les résultats des questions précédentes et le fait que $\mathrm{d}t = 2m_b\mathrm{d}E_1$ on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E_1}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{128\pi^2 s\vec{p}_i^{*2}} \times 2m_b \times \frac{|\vec{p}_a||\vec{p}_1|^2}{(E_a + m_b)|\vec{p}_1| - E_1|\vec{p}_a|\cos\theta}\,. \tag{31}$$

Comme en outre $s\vec{p}_i^{*2} = m_b^2\vec{p}_a^2$ (d'après la question 2.) c'est bien le résultat demandé. Dans cette formule il faut bien noter que non seulement $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ mais aussi E_1 et $\vec{p}_1^2 = E_1^2 - m_1^2$ sont des fonctions de θ.

8. Dans ce cas de figure on a

$$m_b = m_p, \quad |\vec{p}_1| \approx E_1, \quad |\vec{p}_a| \approx E_a \tag{32}$$

et l'équation (28) implique

$$E_1 \approx \frac{m_b|\vec{p}_a|}{E_a + m_p - E_a\cos\theta}\,. \tag{33}$$

La section efficace différentielle se simplifie alors en effet en

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \approx \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{64\pi^2}\frac{1}{(E_a + m_p - E_a\cos\theta)^2} \tag{34}$$

où la seule dépendance implicite en θ provient de $|\mathcal{M}_{fi}|^2$.

Exercice 3

Le nombre d'interactions est $\sigma n x$ avec n la densité et x l'épaisseur. Ici on trouve $nx = 8.4\times10^{24}$ cm^{-1} et donc une probabilité $p \sim 7 \times 10^{-10}$.