Physique des particules – TD4

www.antoinebourget.org/teaching/particules/

Exercice 1 : Rotations et générateurs infinitésimaux

On considère l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé d'axes (x, y, z).

1. Ecrire les matrices des rotations $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ d'angle θ autour des trois axes dans la base canonique.
2. On définit le générateur infinitésimal J_x par la relation $R_x(\theta) = 1 + i\theta J_x + o(\theta)$, et similairement pour les autres axes. Calculer les matrices de ces générateurs infinitésimaux et les relations de commutations.
3. Donner l'interprétation géométrique de ces relations.
4. Donner l'expression des générateurs infinitésimaux des translations et des rotations dans l'espace des fonctions $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en terme d'opérateurs différentiels.
5. Calculer les relations de commutations entre ces générateurs.

Exercice 2 : Théorème de Noether

On considère un champ scalaire complexe décrit par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2|\phi|^2.$$

1. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange pour ce lagrangien.
2. Identifier un groupe de symétrie globale U(1).
3. Montrer que la quantité $j_\mu = \phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*$ satisfait $\partial^\mu j_\mu = 0$ et interpréter cette equation comme une loi de conservation en séparant les parties spatiales et temporelles de cette équation.
4. Comparer avec l'équation de conservation de la charge électrique dans la théorie de Maxwell. Quel est l'analogue de j_μ dans ce cas ?

Exercice 3: Le groupe SU(2)

1. Donner des bases des espaces vectoriels des matrices hermitiennes et antihermitiennes.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\det(I_n + \epsilon M) = 1 + O(\epsilon^2) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0\,. \tag{1}$$

3. On rappelle que $SU(2) = \{U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); U^\dagger U = I_2\,, \det U = 1\}$. En écrivant $U = I_2 + \epsilon M$, déterminer l'espace vectoriel réel auquel doit appartenir M pour que $U \in SU(2)$ au premier ordre en ϵ. Cet espace vectoriel, muni du commutateur des matrices comme crochet de Lie, est l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(2)$.

4. Montrer que si $M \in \mathfrak{su}(2)$ alors $\exp(M) \in SU(2)$.

5. Montrer que $\{\mathrm{i}\sigma_x, \mathrm{i}\sigma_y, \mathrm{i}\sigma_z\}$ est une base de $\mathfrak{su}(2)$.

6. Montrer que $SU(2) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\right\}$. En déduire que $SU(2)$ est topologiquement une sphère S^3.

7. Montrer qu'il existe une matrice $S \in SL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall U \in SU(2),\, U^* = S^{-1}US\,. \tag{2}$$