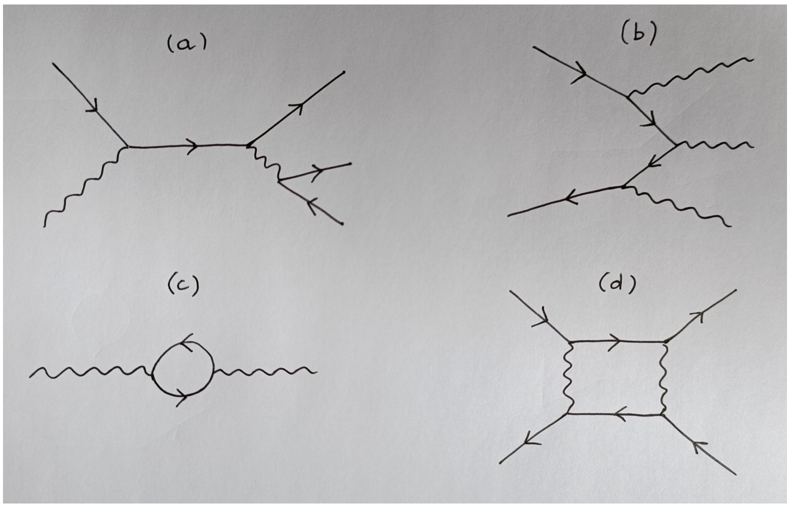
Physique des particules – TD12

www.antoinebourget.org/teaching/particules/

Exercice 1

Ecrire l'élément de matrice $\mathcal{M}$ pour les quatre diagrammes ci-dessus, en précisant les notations utilisées. On suppose que toutes les lignes fermioniques sont des électrons (ou positrons), de masse m. Ecrire ensuite les expressions en faisant apparaître les indices spinoriels.



Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice au processus $e^+e^- \to e^+e^-$ vu en cours. On appelle m la masse de l'électron, et on note p_1 et p_2 les impulsions des particules incidentes, et p_3 et p_4 celles des particules crées. On considère le diagramme correspondant à l'amplitude

$$\mathcal{M}_{fi} = -\frac{e^2}{q^2} \left(\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\right) \left(\bar{u}(p_3)\gamma_\mu v(p_4)\right) . \tag{1}$$

1. Dessiner le diagramme correspondant à l'amplitude ci-dessus et expliquer pourquoi la quantité physiquement intéressante pour ce processus est (en faisant attention au facteur 1/4):

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \sum_{r=1,2}\sum_{s=1,2}\sum_{r'=1,2}\sum_{s'=1,2} \left(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\mu u^s(p_1)\right)\left(\bar{u}^s(p_1)\gamma^\nu v^r(p_2)\right) \\ &\quad \times \left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\mu v^{r'}(p_4)\right)\left(\bar{v}^{r'}(p_4)\gamma_\nu u^{s'}(p_3)\right) . \end{aligned}$$

2. En utilisant les expressions de $u_1(p)$, $\bar{u}_1(p)$, $u_2(p)$, $\bar{u}_2(p)$ vues en cours, vérifier que l'on a pour une particule de masse m

$$\sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not{p} + m \qquad \text{et} \qquad \sum_{s=1,2} v_s(p)\bar{v}_s(p) = \not{p} - m\,. \tag{2}$$

3. En déduire que

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu\right]\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_3 + m)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m)\gamma_\nu\right]. \tag{3}$$

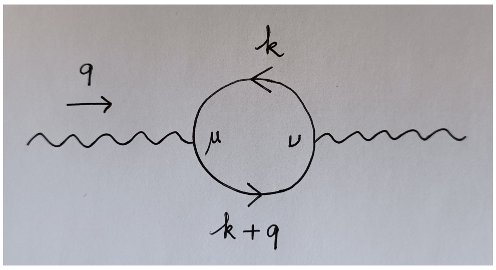
4. Calculer $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu)$, $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$, $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)$ et $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)$.

5. On considère maintenant pour simplifier le cas où m est négligeable devant toutes les impulsions. Montrer que

$$\langle|\mathcal{M}_{fi}|^2\rangle = 2e^4 \times \frac{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)}{(p_1\cdot p_2)^2}. \tag{4}$$

Exercice 3 (Facultatif – Difficile)

On définit la quantité $\Pi_2^{\mu\nu}(q)$ telle que l'élément de matrice pour le diagramme ci-dessous soit $\mathcal{M} = \epsilon_\mu(q)\epsilon_\nu^*(q)\Pi_2^{\mu\nu}(q)$.



1. On suppose que la ligne fermionique représente un électron, de masse m. Montrer qu'on obtient alors

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - \eta^{\mu\nu}(k\cdot(k+q) - m^2)}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)}. \tag{5}$$

Que devrait-on faire sans cette hypothèse ?

2. Montrer que l'on peut réécrire le dénominateur sous la forme

$$\frac{1}{(k^2-m^2)((k+q)^2-m^2)} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(\ell^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2} \tag{6}$$

avec $\ell = k + xq$, puis en faisant le changement de variable $\ell_E = (-i\ell^0, \ell^1, \ell^2, \ell^3)$ et en intégrant sur $\ell_E \in \mathbb{R}^4$ (rotation de Wick), montrer qu'on obtient

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^4\ell_E}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu}(x(1-x)q^2 + m^2)}{(\ell_E^2 + m^2 - x(1-x)q^2)^2}, \tag{7}$$

ce qui est divergent. Les concepts de régularisation et de renormalisation sont nécessaires pour mener à bien la suite du calcul... Rendez-vous dans le cours de théorie quantique des champs!