Physique des particules – TD10

www.antoinebourget.org/teaching/particules/

Exercice 1

On rappelle que les γ^μ sont des matrices 4×4 qui vérifient $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4$. On pose $S^{\mu\nu} = \mathrm{i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/4$.

1. Calculer explicitement $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\rho]$ en fonction de produits de matrices γ.

2. Montrer que les générateurs de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{so}(1, 3, \mathbb{C})$ dans la représentation de définition (c'est-à-dire la représentation vectorielle), que l'on note $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, valent
$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = -\mathrm{i}(\eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma - \eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma)\,. \tag{1}$$

3. Montrer que
$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma \gamma^\sigma \tag{2}$$

4. Montrer que $S^{\mu\nu}$ détermine une représentation de l'algèbre de Lorentz. Quelle est sa dimension ?

Exercice 2 : Spin et équation de Dirac

L'équation de Dirac est
$$\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \tag{3}$$
pour des fonctions $\psi \in \mathbb{C}^4 \otimes L^2(\mathbb{R}^4)$.

1. Si l'on voulait l'interpréter comme une équation de Schrödinger décrivant l'évolution temporelle d'une fonction d'onde, quel devrait être le hamiltonien $\hat{H}_D$?

2. Donner le spectre de ce Hamiltonien.

3. Calculer $\left[\hat{H}_D, \hat{\vec{L}}\right]$.

   On choisit maintenant une représentation explicite des matrices de Dirac (σ_x, σ_y et σ_z sont les matrices de Pauli) :
$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}\,, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{4}$$
   On définit aussi
$$\hat{S}_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}\,. \tag{5}$$

4. Calculer $\left[\hat{H}_D, \hat{\vec{S}}\right]$. Qu'est-ce que cela suggère quant au spin des particules décrites par l'équation de Dirac ?